Toets Quantummechanica 1 19 november 2002

13.45 - 16.45 uur

1.a. Geef de tijdsafhankelijke Schrödinger vergelijking
Voor het geval dat de potentiële energie geen functie van de tijd is, is een golffunctie die een stationaire toestand beschrijft een oplossing van de tijdsafhankelijke Schrödinger vergelijking. Deze golffunctie bevat een plaats en een tijdsafhankelijk deel.

b. Hoe ziet het tijdsafhankelijk deel eruit?

c. Geef de vergelijking waarvan het tijdsonafhankelijke deel de oplossing is.

d. Waarom spreken wij van een stationaire toestand?

2. Voor een deeltje met massa m in een oneindig diepe, ééndimensionale, rechthoekige putpotentiaal

[V(x) = 0 voor $0 \leq x \leq a$, V(x) = ∞ voor $x < 0$ en $x > a$]

worden de oplossingen van de tijdsonafhankelijke Schrödinger vergelijking voor $0 \leq x \leq a$ gegeven door

$$y_n(x) = \sqrt{\tfrac{2}{a}} \sin \frac{npx}{a} \quad \text{met n = 1,2,3, …}$$

a. Laat zien dat de functies $y_n(x)$ eigenfuncties zijn van de hamiltonoperator $\hat{H}$. Bij welke eigenwaarden?

b. Laat zien dat de functies $y_n(x)$ een orthonormale set vormen.

c. Leid de matrixrepresentatie van $\hat{H}$ af in de basis van functies $y_n(x)$. Becommentarieer de vorm van de gevonden matrix.

d. Geef in een tekening $y_1(x)$ weer en de verandering van de vorm van $y_1(x)$ die optreedt als de putpotentiaal een eindige diepte heeft: d.w.z. V(x) = V_0 voor $x < 0$ en $x > a$, met V_0 positief en zodanig groot dat $y_1(x)$ nog steeds een gebonden toestand representeert.

3. Beschouw een deeltje met massa m in een harmonische oscillator potentiaal (krachtconstante k). Voor de orthonormale oplossingen $y_n(x)$ van de tijdsonafhankelijke Schrödinger vergelijking bij energiewaarden $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar w$ (n = 0,1,2, …) geldt

$$\hat{a}_+ \left| y_n \right\rangle = \sqrt{(n+1)\hbar w} \; \left| y_{n+1} \right\rangle$$

$$\hat{a}_- \left| y_n \right\rangle = \sqrt{n\hbar w} \; \left| y_{n-1} \right\rangle$$

waarin $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en $\hat{a}_+$ en $\hat{a}_-$ de ladderoperatoren representeren:

$$\hat{a}_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \pm imwx \right).$$

a. Bereken de verwachtingswaarde van de potentiële energie in de toestand $\left| y_n \right\rangle$ door gebruik te maken van de ladderoperatoren.

b. Bereken de commutator van $\hat{a}_+$ en $\hat{a}_-$.

Stel het deeltje bevindt zich op t = 0 in de toestand

$$\Psi(x,0) = A\left[y_0(x) + y_1(x)\right]$$

c. Bepaal de normeringsconstante A.

d. Bepaal $\Psi(x,t)$.

e. Laat zien of de verwachtingswaarde van de potentiële energie in de toestand $\Psi(x,t)$ een behouden grootheid is.