Toets Quantummechanica 1 8 december 2003
14.00 – 17.00 uur

1 a. Geef de tijdsafhankelijke Schrödinger vergelijking en geef daarin duidelijk aan welke grootheden plaats- en/of tijdsafhankelijk zijn.

b. Onder bepaalde omstandigheden kunnen de oplossingen van deze vergelijking worden geschreven in de vorm van een product van een plaatsafhankelijke en een tijdsafhankelijke functie. Wanneer kan dat?

c. Laat expliciet zien dat de bewering onder (b) juist is en bepaal het tijdsafhankelijke deel van de oplossingen.

2. Voor de tijdsontwikkeling van de verwachtingswaarde van een fysische observabele Q die niet expliciet van de tijd afhangt geldt

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle \left[\hat{H},\hat{Q}\right]\right\rangle$$

a. Wat houdt deze vergelijking in voor een observabele waarvan de corresponderende operator commuteert met de Hamilton operator?

b. Bereken $\frac{d}{dt}\langle p_x\rangle$ voor een deeltje met massa m dat beweegt in één dimensie in de potentiaal $V(x)$.

c. Becommentarieer het resultaat onder (b) in het licht van de uitspraak "verwachtingswaarden gedragen zich klassiek".

3. Beschouw een deeltje met massa m in een oneindig diepe, ééndimensionale, rechthoekige potentiaalput:

$$V(x) = 0 \text{ voor } 0 \le x \le a$$
$$V(x) = \infty \text{ voor } x < 0, x > a\,.$$

De oplossingen van de tijdsonafhankelijke Schrödinger vergelijking voor $0 \le x \le a$ worden gegeven door

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a} \text{ met } n = 1,2,3....$$

a. Laat zien dat de functies $\psi_n(x)$ eigenfuncties zijn van de Hamilton operator. Bij welke eigenwaarden?

b. Stel het deeltje bevindt zich in de toestand ψ_1 en de "rechterwand" van de potentiaal-put wordt plotseling verplaatst van x=a naar x=2a. Wat is de kans dat wij het deeltje dan aantreffen in de grondtoestand van de nieuwe potentiaal?

4. De genormeerde eigentoestanden $\psi_n(x)$ van de ééndimensionale harmonische oscillator behorende bij de energie-eigenwaarden $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ $[n = 0,1,2,\ldots]$ voldoen aan de volgende relaties:

$$\hat{a}_+ \psi_n(x) = \sqrt{(n+1)\hbar\omega}\ \psi_{n+1}(x)$$
$$\hat{a}_- \psi_n(x) = \sqrt{n\hbar\omega}\ \psi_{n-1}(x)$$

waarbij de ladderoperatoren zijn gedefinieerd volgens

$$\hat{a}_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\hat{p}_x \pm im\omega\hat{x}\right)$$

a. Bereken de commutator van $\hat{a}_+$ en $\hat{a}_-$.

b. Geef de matrixrepresentatie van $\hat{H}$ in de basis $\psi_n(x)$ en licht de vorm van de matrix kort toe.

Stel op het tijdstip t=0 is de oscillator in de lineaire superpositietoestand $\Psi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x)$.

c. Geef een uitdrukking voor de tijdsafhankelijke toestand $\Psi(x,t)$.

Beschouw een willekeurige fysische observabele beschreven door de lineaire operator $\hat{Q}$.

d. Laat zien dat de verwachtingswaarde van $\hat{Q}$ in de toestand $\Psi(x,t)$ geschreven kan worden als $\langle Q\rangle = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_p e^{ip\omega t}$, en druk de coëfficienten A_p uit in termen van de matrixelementen van $\hat{Q}$ in de basis van eigentoestanden ψ_n.

e. Bereken A_p expliciet voor het geval $\hat{Q} = \hat{x}$.