QM1 Hertentamen 15 april 2008 (14:00-17:00)

Geen documenten toegestaan.

Opgave 1: Eendimensionale rotator

1.1. Een deeltje (massa m) beweegt op een cirkel (radius a). Zijn positie wordt door de polaire hoek φ gegeven. De potentiële energie van het deeltje is overal nul, het deeltje bezit alleen kinetische energie.

a) Schrijf de klassieke kinetische energie als een functie van de hoek φ. Schrijf de Schrödinger vergelijking als het deeltje volgens de QM beweegt. Hint: De beweging is 1-dimensionaal en de impulsoperator wordt $\frac{\hbar}{ia}\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

b) Los de tijdsonafhankelijke Schrödinger vergelijking op (merk op dat $\psi(\varphi+2\pi)=\psi(\varphi)$), en vind de energieeën E_n en de eigentoestanden als genormaliseerde functies $|\Phi_n\rangle$ van een heel getal $n = 0,1,2,\ldots$.
Zijn deze toestanden ontaard? Let op: $n = 0$ is een speciaal geval.

1.2. Het deeltje bevindt zich bij $t = 0$ in de toestand $|\Psi\rangle$, met:

$$\Psi(\varphi) = A\cos\varphi \quad \text{voor} \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

en $\Psi(\varphi) = 0$ voor $-\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$ en voor $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$.

a) Vind de waarde van A als $|\Psi\rangle$ genormaliseerd is.

b) Wij meten de energie van het deeltje in toestand $|\Psi\rangle$ bij $t = 0$. Wat zijn de kansen om E_n te vinden? Hint: bereken het in-product van $|\Psi\rangle$ en de eigenfuncties $|\Phi_n\rangle$.

c) Wij meten nu de energie op tijd $t = \pi\hbar / E_0$. Wat zijn de kansen om E_n te vinden?

d) Bij een eerste meting van de energie vinden wij de waarde E_3. Wij meten nog een keer de energie onmiddellijk daarna. Wat zijn de kansen om nu E_n te vinden?

Opgave 2: Waterstof atoom

2.1. a) Wat zijn de energieën behorende bij de eigentoestanden van een waterstofatoom? De ionisatiepotentiaal van waterstof is $V_I = 13.6\, eV$.

b) Met welke kwantumgetallen kun je deze eigentoestanden identificeren?

c) Wat zijn de mogelijke waarden van deze getallen en hun fysische betekenis?

2.2. Een waterstofatoom bevindt zich in een lineaire superpositie $|\Psi_m\rangle$ van twee toestanden, $|\varphi_0\rangle = |n_0 = 2, l_0 = 0, m_0 = 0\rangle$ en $|\varphi_1, m\rangle = |n = 2, l = 1, m\rangle$:

$$|\Psi_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_0\rangle + |\varphi_1, m\rangle\right)$$

Wat zijn de verwachtingswaarden in deze toestand van de 3 componenten van de impulsmomentoperator, L_z , L_x , L_y ?
De werking en definitie van de ladderoperatoren zijn gegeven door:

$$L_\pm |l,m\rangle = \sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}\quad |l, m\pm 1\rangle, \text{ en } L_\pm = L_x \pm iL_y .$$

2.3. Het atoom is in toestand $|\Psi_1\rangle$ met $m = 1$.

a) Wat zijn de mogelijke uitkomsten van een meting van L_z en de bijbehorende kansen?

b) Zelfde vraag voor L_x? Hint: vind eerst de eigentoestanden van L_x voor $l = 1$ als combinaties van de vectoren $|l = 1, m\rangle$.

Opgave 3: Optelling van 3 S=1/2 spins

3.1. Wij tellen eerst twee spins $S_1 = 1/2$ en $S_2 = 1/2$ op, $\vec{\Sigma} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$. Wij nemen in deze opgave $\hbar$ als eenheid ($\hbar = 1$). We maken in het vervolg gebruik van tensorproducttoestanden die we noteren als:

$$|S_1, M_1\rangle \otimes |S_2, M_2\rangle \equiv |S_1, M_1; S_2, M_2\rangle .$$

a) Wat is de dimensie (aantal basisvectoren) van deze tensorproductruimte?

b) Wat zijn de mogelijke waarden van het totale impulsmoment?

c) Schrijf de eigentoestanden van Σ^2 en Σ_z ($|\Sigma, M_\Sigma\rangle$) als combinaties van de producttoestanden.

3.2 Wij tellen nu de impulsmomenten van 3 spins 1/2 op, in de ruimte van tensorproducttoestanden:

$$|S_1, M_1\rangle \otimes |S_2, M_2\rangle \otimes |S_3, M_3\rangle \equiv |S_1, M_1; S_2, M_2; S_3, M_3\rangle$$

a) Wat is de dimensie van deze nieuwe tensorproductruimte?

b) Om de nieuwe waarden van het totale impulsmoment te vinden, beschouwen wij de optelling $\vec{J} = \vec{\Sigma} + \vec{S}_3$. Wat zijn de mogelijke waarden van J en M_J (de eigenwaarden van J^2 en J_z zijn $J(J+1)$ en M_J)?

In de volgende stappen bepalen we de eigentoestanden van J^2 en J_z.

c) Vind de eigenvector van J^2 en J_z met de hoogste waarde van M_J. Wat is de waarde $J_{\max}$ van J in deze toestand?
Door toepassing van de ladderoperator $J_- = S_{1-} + S_{2-} + S_{3-}$, vind 4 eigentoestanden van J^2 en J_z. Maak hierbij eventueel gebruik van de volgende relatie:

$$S_- |S, M_S\rangle = \sqrt{S(S+1) - M_S(M_S - 1)} \quad |S, M_S - 1\rangle.$$

d) De eigendeelruimte van J_z met eigenwaarde $M = 1/2$ wordt door 3 vectoren opgespannen:

$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Je kunt ook gebruik maken van een simpelere notatie van deze vectoren, als:

$$|-++\rangle, \ |+-+\rangle, \ |++-\rangle.$$

Vind twee vectoren die orthogonaal zijn met $|J_{\max}, M = 1/2\rangle$ en onderling orthogonaal zijn. Vind dus vier nieuwe eigenvectoren van J^2 en J_z door toepassing van J_-.

3.3. a) Vind met behulp van lineaire combinaties van de bovengegeven basisvectoren drie nieuwe eigenvectoren die ook eigentoestanden zijn van een permutatie van de spins (bijvoorbeeld van de permutatie $P : (1,2,3) \to (3,1,2)$). Hint: Als je P drie keer toepast vindt je precies dezelfde toestand. Dat geeft je de mogelijke eigenwaarden van P.

b) P commuteert met J^2 en J_z. Vind een basis van eigenvectoren van J^2 en J_z die ook eigenvectoren van P zijn. Geef voor alle basistoestanden de waarden van J (de eigenwaarde van J^2 is $J(J+1)$), van M_J en de bijbehorende eigenwaarde van P.