Quantummechanica 1

Uitwerkingen tentamen 4 maart 2008

1. a) - Voorwaarde van α, β, γ? Normalisatie vereist: $1 = |\psi|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2$
   - Verwachtingswaarde $E =< \psi|H|\psi >= |\alpha|^2 E_0 + |\beta|^2 E_1 + |\gamma|^2 E_2$
   - $2.5\hbar\omega$ is de energie van $\phi_2(x)$: kans $|\gamma|^2$

   b) Schrijf de tijdsafhankelijke oplossing $\psi(x,t)$ van de SV.

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \sum_n c_n e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} \phi_n \\ &= \alpha e^{\frac{-iE_0 t}{\hbar}} + \beta e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}} + \gamma e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}}\end{aligned}$$

   c) Wat is de verwachtingswaarde $< x(t) >$?

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^+) \\ \langle x|H\rangle &= \langle \psi(x,t)|x|\psi(x,t)\rangle \\ x\psi(x,t) &= \alpha e^{\frac{-iE_0 t}{\hbar}} + \beta e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}}(\sqrt{2}\phi_2(x) + \phi_0(x)) + \gamma e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}}(\sqrt{3}\phi_3(x) + \sqrt{2}\phi_1(x)) \\ \langle\psi|x|\psi\rangle &= \alpha^*\beta e^{\frac{i(E_0-E_1)t}{\hbar}} + \beta^*\alpha e^{\frac{i(E_1-E_0)t}{\hbar}} + \gamma^*\beta e^{\frac{i(E_2-E_1)t}{\hbar}}\sqrt{2} + \gamma\beta^* e^{\frac{i(E_1-E_2)t}{\hbar}}\sqrt{2} \\ &= Re\left[\alpha^*\beta e^{\frac{i(E_0-E_1)t}{\hbar}} + \gamma\beta^* e^{\frac{i(E_1-E_2)t}{\hbar}}\sqrt{2}\right] \\ &= Re\left[e^{-i\omega t}(\alpha^*\beta + \gamma\beta^*\sqrt{2})\right]\end{aligned}$$

   d) Stel dat $\alpha = \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\beta = 0$. Vind $< x(t) >$.

   Dit geeft $< x >= 0$, $\phi(x)$ is even (dus $< x >= 0$) en blijft even in de tijdsevolutie omdat $V(x) = V(-x)$.

2. Harmonische oscillator in 3D

   a) Schrijf als som en vind de algemene oplossing. Toon aan dat (n_x, n_y, n_z) de toestand uniek bepalen.

   $H = H_x + H_y + H_z$ met $H_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}k_x^2 x^2$, etc.
   Dus de oplossingen zijn $\Psi(\vec{r}) = \phi(x)\phi(y)\phi(z)$ met energieën $E_x + E_y + E_z = \frac{\hbar\omega_x}{2} + \frac{\hbar\omega_y}{2} + \frac{\hbar\omega_z}{2} + n_x\hbar\omega_x + n_y\hbar\omega_y + n_z\hbar\omega_z$. In principe zijn de combinaties uniek, tenzij er toeval is. Iha: $E \Longleftrightarrow (n_x, n_y, n_z)$

b) - Leg uit waarom de Hamiltoniaan commuteert met $\vec{L}$.
$\omega_x = \omega_y = \omega_z$ dus we krijgen een centrale potentiaal. $V(\vec{r})$ hangt alleen van $|\vec{r}| = r$ af dus $[V, \vec{L}] = 0$
- Wat is de grondtoestand? Wat zijn de waarden van l en m?
Grondtoestand $\phi_0(\vec{r}) = A_0 exp^{-\frac{1}{2}\frac{x}{a_0}^2} exp^{-\frac{1}{2}\frac{y}{a_0}^2} exp^{-\frac{1}{2}\frac{z}{a_0}^2} = \phi_0(\vec{r}) = A_0 exp^{-\frac{1}{2}\frac{r^2}{a_0^2}}$.
Geen hoekafhankelijkheid dus moet wel gelden dat $\phi_0(\vec{r}) = \phi_0(r)Y_0^0(\theta,\phi)$. Dus $l = 0, m = 0$.
- Wat is de energie van de eerste aangeslagen groep? Hoeveel toestanden bevat deze groep en wat zijn de mogelijke waarden van l en m?
Er zijn 3 mogelijke eerste aangeslagen toestanden, één van n_x, n_y, n_z is 1 en de rest 0. Energie is $\frac{5\hbar\omega}{2}$. De symmetrieën van de h.o. eigenfuncties zijn die van z, x, y, dus precies die van Y_1^0, $Y_1^1 + Y_1^1$ en $Y_1^1 - Y_1^1$. Dus de mogelijke waarden van l en m zijn: $l = 0, m = 0, \pm 1$.

c) Herleid de uitdrukking voor de ontaardingsgraad $g_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Als N bepaald is, moet gelden in 2D $n_x + n_y = N$, wat $N+1$ mogelijkheden geeft. In 3D moet nu gelden: als $n_z = 0$ zijn er $N+1$ mogelijkheden, als $n_z = 1$, N mogelijkheden, enz.
Dus geldt $g_N = 1 + 2 + ... + (N+1) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$

d) - Toon aan dat Π met de Hamiltoniaan commuteert. Wat zijn de mogelijke waarden van ε?
Omdat $H(\vec{r}) = H(-\vec{r})$ en $\Pi^2 = 1$ geldt $H\Pi = \Pi H$. Omdat $\varepsilon^2 = 1$ is $\varepsilon = \pm 1$.
- Toon aan dat de pariteit van een eigentoestand van H met de pariteit van het totaal aantal kwanta, $n = n_x + n_y + n_z$ verbonden en $(-1)^n$ is.
Eigentoestand van H is een eigentoestand van product H_x, H_y, H_z. Dus $\varepsilon = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$. Voor H_x is de pariteit van $\phi_{n_x}(x) = (-1)^{n_x}$, dus voor $\varepsilon = (-1)^{n_x+n_y+n_z} = (-1)^n$
- Wat zijn de mogelijke waarden van l in de tweede aangeslagen groep van toestanden van de harmonische oscillator in drie dimensies?
l moet dezelfde pariteit hebben als n. Voor $n = 2$ moet je dus l even hebben. Je hebt 6 toestanden voor $n = 2$. Omdat $l = 4$ te groot is (9 toestanden nodig) blijft alleen $l = 2$ (5 toestanden) en één keer $l = 0$ (1 toestand).

3. Optelling van 2 spins

a) - Wat is de dimensie van de tensorproductruimte? Dit is $3 \times 3 = 9$
- Maximale M_J en J_{max}?
Maximale $M_J = 2$ dus $J_{max} = 2$.
- Laat nu de ladderoperator werken.
$J_- |J = 2, M = 2\rangle = J_- |M_1 = 1, M_2 = 1\rangle$ geeft na normalisatie
$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle + |1,0\rangle) = |J = 2, M = 1\rangle$
$J_- |J = 2, M = 1\rangle$ geeft na normalisatie
$\frac{1}{\sqrt{6}}(|-1,1\rangle + 2|0,0\rangle) + |1,-1\rangle = |J = 2, M = 0\rangle$
Nog 1 keer loweren geeft $|J = 2, M = -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-1,0\rangle + |0,-1\rangle)$
En $|J = 2, M = -2\rangle = |-1,-1\rangle$

b) Vind de vector die orthogonaal is. En gebruik weer de ladderoperatoren.
Vector orthogonaal met $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle + |1,0\rangle) = |J=2, M=1\rangle$ is
$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle - |1,0\rangle) = |J=2, M=1\rangle$
Loweren geeft:
$J_- |J_{med}=1, M=1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-1,1\rangle - |1,-1\rangle)$ $J_- |J_{med}=1, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-1,0\rangle - |0,-1\rangle)$

c) Vind tot slot de laatste toestand door een vector orthogonaal met zowel $|J_{max}, M_J=0\rangle$ als $|J_{med}, M_J=0\rangle$ te vinden.
We zoeken $\alpha|1,-1\rangle + \beta|0,0\rangle + \gamma|-1,1\rangle = |x\rangle$ zodat
$\langle J_{max}, 0|x\rangle = 0$, $\langle J_{med}, 0|x\rangle = 0$,
$\frac{\alpha}{\sqrt{6}} + \frac{2\beta}{\sqrt{6}} + \frac{\gamma}{\sqrt{6}} = 0$, $\alpha - \gamma = 0$.
Oplossing: $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1,-1\rangle - |0,0\rangle + |-1,1\rangle)$
Uiteraard geldt $J_{min=0}$

d) Drie experimenten.
- A: uitkomsten: $+1$ kans $\frac{1}{6}$, 0 kans $\frac{2}{3}$, -1 kans $\frac{1}{6}$.
- B: uitkomsten: $+1$ kans $\frac{1}{3}$, 0 kans $\frac{1}{3}$, -1 kans $\frac{1}{3}$.
- C: $S_{1z} = 0$, kans $\frac{1}{2}$, $S_{1z} = -1$, kans $\frac{1}{2}$

e) Wat voor deeltjes? Dit zijn bosonen en die heeft een symmetrische functie in uitwisseling van deeltjes. De genoemde toestand is antisymmetrisch, dus de baanfunctie moet ook antisymmetrisch zijn om het geheel symmetrisch te maken.