QM1 Tentamen 04 maart 2008 (14:00-17:00)

Geen documenten toegestaan.

Opgave 1: Harmonische Oscillator in 1 dimensie

1.1. Een deeltje bevindt zich in de volgende niet-stationaire toestand ψ in een harmonische oscillator potentiaal:

$$\psi(x) = \alpha\varphi_0(x) + \beta\varphi_1(x) + \gamma\varphi_2(x).$$

Hierin zijn $\varphi_n(x)$ de genormeerde eigenfuncties van de Hamiltoniaan met energieën

$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, $n = 0,1,...$ en α, β, γ zijn 3 complexe getallen.

- Aan welke voorwaarde moeten α, β, γ voldoen indien de golffunctie genormaliseerd is? Wij gaan er in het vervolg vanuit dat aan deze voorwaarde voldaan is.
- Wat is de verwachtingswaarde van de energie in toestand ψ?
- Wat is de kans om bij een energiemeting $2.5 \times \hbar\omega$ te vinden?

1.2. Schrijf de tijdsafhankelijke oplossing $\Psi(x,t)$ van de Schrödinger vergelijking met als beginvoorwaarde $\Psi(x, t = 0) = \psi(x)$.

1.3. De positie operator kan met behulp van ladderoperatoren worden geschreven als:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^+),$$

met $a^+\varphi_n = \sqrt{n+1}\,\varphi_{n+1}$, en $a\varphi_n = \sqrt{n}\,\varphi_{n-1}$.

- Wat is de verwachtingswaarde $\langle x(t) \rangle$ van x in toestand $\Psi(x,t)$?

1.4. Stel dat $\alpha = \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en dat $\beta = 0$. Vind $\langle x(t) \rangle$. Had je dit resultaat kunnen verwachten?

Opgave 2: Harmonische Oscillator in 3 dimensies

2.1. Beschouw een harmonische oscillator in drie dimensies. De potentiële energie van dit systeem is gegeven door:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left[k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2\right].$$

- Schrijf de Hamiltoniaan H van het systeem als een som van drie 1-dimensionale Hamiltonianen, en vind de algemene vorm van de oplossingen van de tijdsonafhankelijke Schrödinger vergelijking (hint : Schrijf $\psi(\vec{r})$ als product van functies van de 3 coördinaten x, y, z; de expliciete vorm van deze functies hoeft niet te worden gegeven).
- k_x, k_y, k_z zijn 3 willekeurige constanten. Toon aan dat, in het algemeen, drie hele kwantumgetallen n_x, n_y, n_z nodig en voldoende zijn om elke eigentoestand van H te bepalen. Ze zijn dus niet ontaard.

2.2. Alleen in het geval dat de drie constanten k_x, k_y, k_z gelijk zijn commuteert de Hamiltoniaan met de drie componenten van het impulsmoment operator $\vec{L}$:

$$k_x = k_y = k_z \equiv m\omega^2.$$

- Leg uit waarom. In het vervolg beschouwen we uitsluitend dat geval.

- Wat is de grondtoestand van deze harmonische oscillator? Wat zijn in deze toestand de waarden van *l* en *m* (de kwantumgetallen die de eigenwaarden van L^2 en L_z karakteriseren)? (Hint: beschouw de symmetrie van de geassocieerde golffunctie).

- Wat is de energie van de eerste aangeslagen groep van toestanden? Hoeveel toestanden bevat deze groep? Wat zijn de mogelijke waarden van *l* en *m* voor deze eigentoestanden? (Hint: vergelijk de symmetrie van de geassocieerde golffuncties met die van sferische harmonischen).

2.3. Herleid de volgende uitdrukking voor de ontaardingsgraad g_n (ofwel dimensie) van een eigendeelruimte van H met het totaal aantal kwanta $n = n_x + n_y + n_z$:

$$g_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Hint: zoek eerst de ontaardingsgraad in twee dimensies voor $N = n_x + n_y$

2.4. Wij beschouwen nu de pariteitoperator Π in drie dimensies, die aan een positie $\vec{r}$ de positie $-\vec{r}$ associeert (Π verandert de tekens van alle drie coördinaten).

- Toon aan dat Π met de Hamiltoniaan commuteert. Een eigentoestand van de pariteit voldoet aan $\Pi|\psi\rangle = \varepsilon|\psi\rangle$. ε wordt *pariteit* van toestand $|\psi\rangle$ genoemd. Wat zijn de mogelijke waarden van ε?
- Toon aan dat de *pariteit* van een eigentoestand van H met de pariteit van het totaal aantal kwanta, $n = n_x + n_y + n_z$ verbonden is, en $(-1)^n$ is.
- De *pariteit* van de sferische harmonische Y_l^m is $(-1)^l$. Wat zijn de mogelijke waarden van *l* in de tweede aangeslagen groep van toestanden van de harmonische oscillator in drie dimensies?

Opgave 3: Optelling van 2 S=1 spins

3.1. Wij tellen twee spins $S_1 = 1$ en $S_2 = 1$ op, $\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$. Wij nemen in deze opgave $\hbar$ als eenheid ($\hbar = 1$). We noteren de tensorproducttoestanden als:

$$|S_1, M_1\rangle \otimes |S_2, M_2\rangle \equiv |M_1, M_2\rangle .$$

- Wat is de dimensie van de tensorproductruimte? In de volgende stappen bepalen we de eigentoestanden van J^2 en J_z.
- Wat is *de* toestand met de maximale waarde van M_J? Wat is de waarde $J_{\max}$ van J in deze toestand?
- Laat de ladderoperator $J_- = S_{1-} + S_{2-}$ op deze toestand werken en vind vijf eigentoestanden van J^2 en J_z. Maak hierbij gebruik van de volgende relatie:

$$S_-|S, M_S\rangle = \sqrt{S(S+1) - M_S(M_S - 1)} \quad |S, M_S - 1\rangle .$$

3.2. Beschouw de 2-dimensionale eigenruimte van J_z met $M_J = 1$. Vind hierin *de* vector die orthogonaal is met $|J_{\max}, M_J = 1\rangle$. Wat is de waarde J_{med} van J in deze toestand? Laat nog een keer de ladderoperator J_- werken om drie nieuwe eigentoestanden van J^2 en J_z te vinden.

3.3. Beschouw de 3-dimensionale eigenruimte van J_z met $M_J = 0$. Vind hierin *de* vector die orthogonaal is met $|J_{\max}, M_J = 0\rangle$ en met $|J_{med}, M_J = 0\rangle$. Wat is de waarde $J_{\min}$ van J in deze toestand?

3.4. Wij doen nu 3 experimenten:

i) Het systeem is in de toestand $|J_{\max}, M_J = 0\rangle$. Wij meten de observabele S_{2z} (z-component van $\vec{S}_2$). Wat zijn de mogelijke uitkomsten en hun kansen?
ii) Wij hebben geen informatie over het gehele systeem. Wij meten S_{2z} en vinden 0. Wij gaan nu S_{1z} meten. Wat kunnen wij zeggen over de mogelijke meetwaarden van S_{1z} en hun kansen?
iii) Het systeem is in een toestand met $J = J_{med}$, maar wij hebben geen verdere informatie. Wij meten S_{2z} en vinden +1. Wij gaan nu S_{1z} meten. Wat zijn de mogelijke meetwaarden van S_{1z} en hun kansen?

3.5 De deeltjes die spins S_1 en S_2 dragen zijn nu ononderscheidbaar. Wat voor deeltjes zijn dat? Wat is de symmetrie van het totale systeem in een uitwisseling (baan- en spintoestanden) van deeltjes 1 en 2? Wat is de symmetrie van de baangolffunctie in deze uitwisseling als de spintoestand $|J_{med}, M_J = 1\rangle$ is?

<u>Eventueel nuttige relaties:</u>

i) Eerste eigengolffuncties van een harmonische oscillator in 1 dimensie:

$$\varphi_0(\xi) = a_0 \exp(-\xi^2/2),$$
$$\varphi_1(\xi) = \sqrt{2}\, a_0\, \xi \exp(-\xi^2/2),$$
$$\varphi_2(\xi) = a_0\sqrt{2}\left(\xi^2 - \frac{1}{2}\right)\exp(-\xi^2/2).$$

met $a_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$, en $\xi = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$.

ii) Eerste sferische harmonischen:

$$Y_0^0(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},\ Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\ Y_1^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\exp(\pm i\varphi),\ Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$Y_2^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\exp(\pm i\varphi),\ Y_2^{\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\exp(\pm 2i\varphi)$$

met $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$.