# Quantummechanica 1

## Uitwerkingen toets

1. a) Druk de Hamiltoniaan uit in $x$ en $p$

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega \left( \frac{1}{2m\hbar\omega x} (p + im\omega x)(p - im\omega x) + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar\omega \left( \frac{1}{2m\hbar\omega x} \left( p^2 + m^2\omega^2 x^2 + im\omega (xp - px) \right) + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \end{aligned}$$

   b) Zijn de kets orthonormaal?

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle &= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1 \\ \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle &= 1 \\ \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle &= \frac{1}{2} \neq 1 \end{aligned}$$

   Antwoord: nee, ze staan niet orthogonaal, de vectoren zelf zijn wel genormaliseerd.

   c) Laat $a_-$ werken
   $a_+ a_- |\psi_0\rangle = 0|\psi_0\rangle = 0$
   Enige mogelijkheid is $a_-|\psi_0\rangle = 0$

$$\begin{aligned} a_+ \left( a_- |\psi_n\rangle \right) &= n |\psi_n\rangle \\ a_+ |\psi_{n-1}\rangle &= \sqrt{n} |\psi_n\rangle \\ a_- |\psi_n\rangle &= \sqrt{n} |\psi_{n-1}\rangle \\ a_- |\psi_1\rangle &= 0 + \sqrt{\frac{3}{8}} |\psi_0\rangle - i\sqrt{\frac{3}{8}} |\psi_2\rangle \\ a_- |\psi_2\rangle &= 0 + \sqrt{\frac{3}{4}} |\psi_1\rangle - i\sqrt{\frac{1}{2}} |\psi_3\rangle \end{aligned}$$

2. a) Geef de golffunctie van de n-de toestand en beredeneer de waarden van $\langle x \rangle$ en $\langle p \rangle$.
   Zie Griffiths 2.2 voor precieze uitwerking.

$$
\begin{aligned}
\psi_n &= \sqrt{\frac{2}{a}} sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\
\langle x \rangle &= \frac{a}{2} \\
\langle p \rangle &= 0
\end{aligned}
$$

b) Bereken in deze toestanden de waarden van $\langle p^2 \rangle$

$$
\begin{aligned}
\left\langle p^2 \right\rangle &= \frac{2}{a}\int_0^a sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2 sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \\
&= -\frac{2}{a}\hbar^2 \frac{n\pi}{a}^2 \int_0^a sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left(-sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right) dx \\
&= n^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2} \\
&= 2mE_n
\end{aligned}
$$

c) Heisenberg onzekerheidsrelatie

$$
\begin{aligned}
\left\langle x^2 \right\rangle &= \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2\left(n\pi\right)^2} \\
\Delta x^2 &= \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{2\left(n\pi\right)^2} \\
\Delta p^2 &= \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p \rangle^2 = n^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2} \\
\Delta x \Delta p &= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\left(n\pi\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} n\pi\hbar \\
Heisenberg : \Delta x \Delta p &\geq \frac{\hbar}{2} \\
\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\left(n\pi\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} n\pi &= n\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{6}{\left(n\pi\right)^2}}
\end{aligned}
$$

Dit geeft voor $n = 1$ geen minimaal golfpakket, en nog minder voor $n > 1$

d) Voor $x > b$ inkomend en reflecterend: $e^{ikx} + Ae^{-ikx}$
Voor $-b < x < b$ ook twee oplossingen: $Be^{ikx} + Ce^{-ikx}$
Voor $x < -b$ geen golf van links: $De^{ikx}$

e) Randvoorwaarden: $\psi$ moet continu zijn, en zijn 1e afgeleide ook. Combineren van de vergelijkingen van d) geeft:

$$\begin{aligned}
e^{ikb} + Ae^{-ikb} &= Be^{ikb} + Ce^{-ikb} \\
ike^{ikb} - ikAe^{-ikb} &= ikBe^{ikb} - ikCe^{-ikb} \\
Be^{-ikb} + Ce^{ikb} &= De^{-ikb} \\
ikBe^{-ikb} - ikCe^{ikb} &= ikDe^{-ikb}
\end{aligned}$$

3. a) Diagonaliseer H Probeer symmetrische en antisymmetrische combinaties:

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & V \\ V & E_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle) \\
|2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle - |u_2\rangle)
\end{aligned}$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E_0 & V \\ V & E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{E_0 + V}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (E_0 + V)|1\rangle$$

Dus $|1\rangle$ eigenvector met eigenwaarde $E_0 + V$

$$H|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E_0 & V \\ V & E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E_0 - V \\ V - E_0 \end{pmatrix} = (E_0 - V)|2\rangle$$

Dus $|2\rangle$ eigenvector met eigenwaarde $E_0 - V$

b) Op $t = 0$

$$\begin{aligned}
|\psi(0)\rangle &= |u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \\
|\psi(t)\rangle &= \sum_{n=1}^{2} e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} c_n |n\rangle
\end{aligned}$$

met $c_n = \langle n|\psi(0)\rangle$

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}\,|1\rangle + e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\,|2\rangle\right)\\
|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}\left(e^{-i\frac{Vt}{\hbar}}\,|1\rangle + e^{-i\frac{Vt}{\hbar}}\,|2\rangle\right)\\
|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_1\rangle + |u_2\rangle\right)\\
|2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_1\rangle - |u_2\rangle\right)\\
|\psi(t)\rangle &= e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}\left(cos\left(\frac{Vt}{\hbar}\right)|u_1\rangle - isin\left(\frac{Vt}{\hbar}\right)|u_2\rangle\right)
\end{aligned}$$

c) Op tijd t meten van H geeft eigenwaarden:
$E_1$ met waarschijnlijkheid $|\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}$
$E_2$ met waarschijnlijkheid $|\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

Als $E_1$ wordt gemeten op t, geeft een tweede meting ook weer $E_1$! Oftewel, $E_1$: 100 %, $E_2$: 0 %

d) Meting van

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[A, H] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_0 & V \\ V & E_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E_0 & V \\ V & E_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2V \\ -2V & 0 \end{pmatrix} \neq 0
\end{aligned}$$

Meting van A geeft 1 met waarschijnlijkheid $|\langle u_1|\psi(t)\rangle|^2$

Meting van A geeft -1 met waarschijnlijkheid $|\langle u_2|\psi(t)\rangle|^2$

Op $t = 0$ 1: 100 %, -1: 0 %

Op t 1: $cos^2\left(\frac{Vt}{\hbar}\right)$, -1: $sin^2\left(\frac{Vt}{\hbar}\right)$