QM1 Toets 21 december 2007 (10:00-13:00)

Geen documenten toegestaan.

Opgave 1

Beschouw een harmonische oscillator in 1 dimensie. Het deeltje in dit systeem heeft een massa m. De Hamiltoniaan van dit systeem is gegeven door:

$$H = \hbar\omega\left(a_+ a_- + \frac{1}{2}\right)$$

waar $a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(P \pm im\omega X\right)$,
en P en X de impuls- en positieoperatoren zijn.
De eigentoestanden van de Hamiltoniaan zijn de kets $|\phi_n\rangle$, $n = 0,1,\ldots$.

1.1. Druk de Hamiltoniaan uit in P en X.

1.2. De volgende 2 kets zijn mogelijke toestanden van het systeem:

$$|\psi_1\rangle = i\sqrt{\frac{1}{2}}|\phi_0\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}}|\phi_1\rangle - i\sqrt{\frac{1}{8}}|\phi_3\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = i\sqrt{\frac{1}{2}}|\phi_0\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}}|\phi_2\rangle - i\sqrt{\frac{1}{8}}|\phi_4\rangle$$

Laat zien dat beide toestanden genormaliseerd zijn. Bereken het inproduct van $|\psi_1\rangle$ en $|\psi_2\rangle$. Zijn ze orthogonaal?

1.3. Verder wordt gegeven dat:

$a_+|\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle$, en $a_+a_-|\phi_n\rangle = n|\phi_n\rangle$.

Laat de operator a_- op $|\psi_1\rangle$ en $|\psi_2\rangle$ werken.

Opgave 2: Oneindige rechthoekige put

2.1. Leid kort af en geef de golffunctie van de n-de toestand van een "infinite square well" in 1 dimensie die zich van $x = 0$ tot $x = a$ uitstrekt. Beredeneer op grond van de statistische interpretatie van deze golffuncties wat de waarden van $\langle X \rangle$ en $\langle P \rangle$ in deze toestanden zijn.

2.2. Bereken nu in deze toestanden de waarden van $\langle P^2 \rangle$ (maak gebruik van de uitdrukking van de golffuncties en van P als operator).

2.3. De waarden van $\langle X^2 \rangle$ zijn gegeven door:

$$\langle X^2 \rangle = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2(n\pi)^2}.$$

Bereken nu voor elke toestand de uitkomst van de Heisenberg onzekerheidsrelatie. Wat valt je op?

Wij bekijken vanaf nu een eindig diepe put met breedte $2b$, symmetrisch om zijn centrum, en met diepte V_0 (de potentiaal buiten de put is nul, de potentiaal in de put is negatief).

2.4. Van rechts komt een vlakke golf binnen. Leid het stelsel van vergelijkingen af waar de tijdsonafhankelijke oplossing van de golffunctie aan moet voldoen. Neem hiervoor aan dat de energie $E > 0$ (dus een verstrooiingstoestand of 'scattering state').

2.5. Benoem de randvoorwaarden voor de golffunctie waarmee de oplossing uiteindelijk gevonden kan worden (de oplossing zelf hoef je niet te geven).

Opgave 3

Een simpel systeem is beschreven door een Hilbertruimte met twee dimensies. In een gegeven basis $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ heeft de Hamiltoniaan de volgende vorm:

$$H = \begin{bmatrix} E_0 & V \\ V & E_0 \end{bmatrix}$$

3.1. Diagonaliseer *H* (dwz, vind de eigenwaarden E_1 en E_2, en een nieuwe basis van eigenvectoren $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ van *H*). Tip: voer symmetrische en antisymmetrische combinaties van de oorspronkelijke basisvectoren in.

3.2. Op tijd $t = 0$ is de toestand van het systeem de vector $|\psi(0)\rangle = |u_1\rangle$. Schrijf $|\psi(0)\rangle$ als combinatie van de eigenvectoren. Schrijf de toestandvector $|\psi(t)\rangle$ op tijd t met behulp van de Schrödingervergelijking, eerst in de eigenbasis van *H*, dan in de oorspronkelijke basis.

3.3. Wij meten de totale energie van het systeem (dwz de observabele *H*) op tijd t.
- Wat zijn de mogelijke resultaten van de meting en wat zijn hun waarschijnlijkheden?
- Hoe hangen ze van de tijd af?
- Een eerste meting op tijd t heeft de waarde E_1 gegeven. Wat zijn de mogelijke resultaten van een tweede meting die onmiddellijk daarna plaatsvindt?

3.4. Wij willen nu een operator *A* meten, die de volgende matrix in de basis $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ heeft:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Is *A* een observabele? Commuteert *A* met *H*?
- Neem de beginvoorwaarde van (3.2). Wat zijn de mogelijke resultaten van de meting van *A* en hun waarschijnlijkheden als de meting op tijd $t = 0$ plaatsvindt?
- Zelfde vraag als de meting op tijd t plaatsvindt.