QM1 Toets 18 december 2008 (14:00-17:00)
Geen documenten toegestaan.

Opgave 1: Oneindige-eindige rechthoekige put (32 punten)

Een eendimensionale potentiaal $V(x)$ is gegeven door:
$V(x)=0$ voor $x \geq a$, $V(x)=-V_0$ voor $0<x<a$, and $V(x)=\infty$ voor $x<0$; $V_0>0$.

1.1. Wij zoeken de gebonden toestanden van een deeltje met massa m in deze potentiaal.
- Teken de potentiaal.
- Waar moeten wij de energieën van gebonden toestanden zoeken?
- Schrijf algemene oplossingen van de tijdsonafhankelijke Schrödinger vergelijking in elk positiebereik.
- Schrijf de randvoorwaarden bij $x=a$ en $x=0$.

1.2. Laat zien dat je de voorwaarde voor de toegestane energieën kan schrijven als

$$\cot z = -\sqrt{\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 - 1} \quad ,$$

waarbij $z \geq 0$ een functie van de energie is en waarbij $z_0 = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0}$.

Geef deze vergelijking grafisch weer. Vind je altijd een oplossing? Geef de kritische waarden van V_0 waarvoor het aantal oplossingen verandert.

1.3. Wij beschouwen nu de verstrooiing van een vrij deeltje door deze potentiaal. Het deeltje komt als een golfpakket vanuit de positieve richting $x>0$. Wij noemen E de kinetische energie van dit pakket.
- Schrijf de randvoorwaarden van de golffunctie bij $x=a$ en $x=0$.
- Bereken de reflectiecoëfficiënt voor de golffunctie en voor de waarschijnlijkheid (modulus kwadraat). Wat valt je op?

Opgave 2: Harmonische oscillator (32 punten)

Beschouw een harmonische oscillator in 1 dimensie. Het deeltje in dit systeem heeft een massa m, de hoekfrequentie van de oscillatie is ω. De Hamiltoniaan van dit systeem is gegeven door:

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

Daarnaast zijn gegeven $X = x_0\left(a + a^\dagger\right)$, $P = p_0\left(a - a^\dagger\right)$ en $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$,

waarbij a en $a^\dagger$ ladderoperatoren zijn die aan $\left[a, a^\dagger\right] = 1$ voldoen (let op: de definitie van deze operatoren verschilt van die van Griffiths). P en X zijn de gebruikelijke impuls- en positieoperatoren.
De eigentoestanden van de Hamiltoniaan zijn de kets $\left|\phi_n\right\rangle$, $n = 0, 1, \ldots$.
De actie van de ladderoperatoren op $\left|\phi_n\right\rangle$ is:

$$a^\dagger\left|\phi_n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|\phi_{n+1}\right\rangle, \text{ en } a\left|\phi_n\right\rangle = \sqrt{n}\left|\phi_{n-1}\right\rangle.$$

2.1. Wat is de bij toestand $\left|\phi_n\right\rangle$ behorende energie?
- Gebruik de commutatierelatie tussen P en X om p_0 te vinden.

2.2. Wij voeren de volgende operatoren in:

$$C_n = \left[H, X^n\right]$$

- Zijn de C_n observabelen?
- Vind een relatie tussen C_n, C_{n-1}, C_1 en X.
- Schrijf C_1 met behulp van P.
- Gebruik deze resultaten om C_2 met behulp van P en X uit te drukken.

2.3. De oscillator is bij $t = 0$ in de volgende toestand:

$$\left|\psi(0)\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left|\phi_n\right\rangle$$

- Schrijf de toestand $\left|\psi(t)\right\rangle$ op een willekeurige tijdstip t.
- Wat is de verwachtingswaarde van de positieoperator $\left\langle\psi(0)\right| X \left|\psi(0)\right\rangle$ in toestand $\left|\psi(0)\right\rangle$? Gebruik de actie van de ladderoperatoren op $\left|\phi_n\right\rangle$ om de uitdrukking van $\left\langle\psi(0)\right| X \left|\psi(0)\right\rangle$ te vereenvoudigen.
- Concludeer daaruit dat de *tijdsafhankelijke* verwachtingswaarde van X, $\left\langle X(t)\right\rangle = \left\langle\psi(t)\right| X \left|\psi(t)\right\rangle$, de volgende vorm heeft:

$$\left\langle X(t)\right\rangle = b\exp(i\omega t) + b^* \exp(-i\omega t),$$

die wij ook $\langle X(t)\rangle = A\cos(\omega t+\varphi)$ kunnen schrijven. De uitdrukkingen van A,φ hoeven niet te worden gegeven. Wat is de klassieke interpretatie van dit resultaat? Wat is er het merkwaardige aan?

Opgave 3: Positiemeting in een rechthoekige put (36 punten)

Een deeltje in een oneindig diepe put tussen $x=-a$ en $x=+a$ bevindt zich in de eerste aangeslagen toestand $|\psi_1\rangle$ (de eerste toestand boven de grondtoestand).

3.1. Schrijf en teken zonder bewijs de (genormaliseerde) golffunctie van deze toestand.

3.2. Wij voeren een operator A in die de aanwezigheid van het deeltje in de rechter kant van de put toetst (er is gebruik gemaakt van de Dirac notatie en van Dirac orthonormalisatie in een continue basis van gelokaliseerde toestanden $\{|x\rangle\}$):

$$A=\int_0^a dx\,|x\rangle\langle x|.$$

- Is A een observabele?
- Toon aan dat A een projector is.
- Wat zijn de eigenwaarden van A? Zijn ze ontaard?

3.3. Wij meten de operator A terwijl het deeltje zich in toestand $|\psi_1\rangle$ bevindt, en vinden de waarde 1.
- Gebruik het meetpostulaat om de toestand $|\varphi_1\rangle$ van het deeltje onmiddellijk na de meting te bepalen.
- Teken de golffunctie in deze nieuwe toestand en, op dezelfde schaal, die van de oorspronkelijke toestand $|\psi_1\rangle$.

3.4. Schrijf (zonder bewijs) de eigentoestanden van de Hamiltoniaan in de put, maak daarbij een onderscheid tussen de even en oneven toestanden.
Schrijf de decompositie van de nieuwe toestand $|\varphi_1\rangle$ op deze basis. Bereken de coëfficiënten expliciet.

3.5. Schrijf de gemiddelde energie (verwachtingswaarde) voor de meting. Schrijf de gemiddelde energie na de meting als een reeks. Zijn deze energieën gelijk? Commuteert A met de Hamiltoniaan?