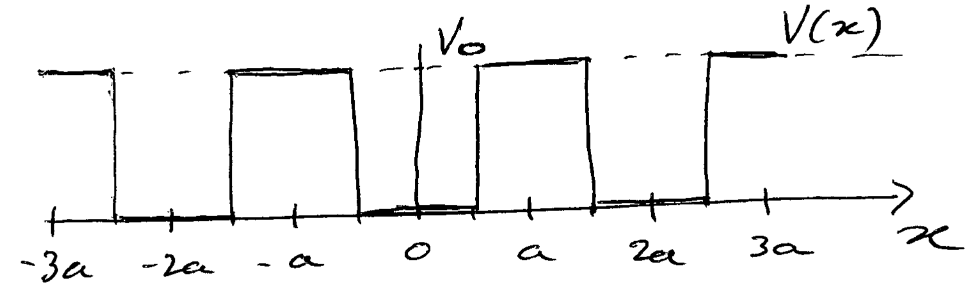
Tentamen QMI : 09 Febr. 2010

Uitwerking

OPGAVE 1

1.1 (a)



(b) Gebied I $\quad -a/2 \le x \le \frac{a}{2} \Rightarrow E > V(x) = 0$

oplossingen $e^{\pm ikx}$ met $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

Gebied II $\quad \frac{a}{2} \le x \le \frac{3a}{2} \Rightarrow E < V(x) = V_0$

oplossingen $e^{\pm qx}$ met $q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$

$$\psi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} = A_1 \cos kx + B_1 \sin kx$$

$$\psi_{II}(x) = C e^{qx} + D e^{-qx} = C_1 \cosh qx + D_1 \sinh qx$$

(cos, sin zijn lin. combin. van $e^{\pm i}$ die even en oneven zijn; cosh, sinh —— $e^{\pm}$ ——)

1.2 Randvoorwaarden:

Bij de contact tussen gebieden I en II moeten ψ en $\frac{d\psi}{dx}$ continu zijn (immers, $|V| < \infty$)

$$\left.\begin{aligned} \psi_I\left(\tfrac{a}{2}\right) &= \psi_{II}\left(\tfrac{a}{2}\right) \\ \frac{d}{dx}\psi_I\left(\tfrac{a}{2}\right) &= \frac{d}{dx}\psi_{II}\left(\tfrac{a}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & A_1 \cos\frac{ka}{2} + B_1 \sin\frac{ka}{2} = C_1 \cosh\frac{qa}{2} + D_1 \sinh\frac{qa}{2} \\ & k\left(-A_1 \sin\frac{ka}{2} + B_1 \cos\frac{ka}{2}\right) = q\left(\cosh\frac{qa}{2} + \sinh\frac{qa}{2}\right) \end{aligned}$$

$(\cosh' = \sinh, \ \sinh' = \cosh)$

1.3 Even oplossing : $\psi(x) = \psi(-x)$

(mogelijk omdat V ook even is t.o.v. $x=0$)

Periodieke oploss. $\psi(x+2a) = \psi(x)$

ⓐ ψ even $\Rightarrow$ $\psi(-\frac{a}{2}) = \psi(\frac{a}{2})$

ψ periodiek $\Rightarrow$ $\psi(-\frac{a}{2}) = \psi(\frac{3a}{2})$ $\Big\}$ $\psi(\frac{a}{2}) = \psi(\frac{3a}{2})$

Dus $\psi_{II}(\frac{a}{2}) = \psi_{II}(\frac{3a}{2})$. Dus, de enige mogelijkheid

is als $D_1 = 0$: $\psi_{II} = C_1 \cosh(qX)$ $(X = x-a)$

(en ψ_{II} is even t.o.v. $x = a$).

[andere mogelijkheid : $\psi(x+2a) = \psi(x) = \psi(-x) \Rightarrow$

met $y = x+a$ $\psi(a+y) = \psi(-x) = \psi(a-y)$].

ⓑ $\psi_I = A_1 \cos kx$, $\psi_{II} = C_1 \cosh q(x-a)$

ⓒ Gebruik randvoorw. $A_1 \cos\frac{ka}{2} = C_1 \cosh\frac{qa}{2}$

$\frac{d}{dx}\psi \rightarrow$ $-kA_1 \sin kx = qC_1 \sinh q(x-a)$

$\Rightarrow$ $-kA_1 \sin\frac{ka}{2} = qC_1 \sinh -\frac{qa}{2} = -qC_1 \sinh\frac{qa}{2}$

Dus, door te delen : $\underline{k \tan\frac{ka}{2} = q \tanh\frac{qa}{2}}$.

1.4 Grensgeval $qa \gg 1$, en $\tanh\frac{qa}{2} \simeq 1$

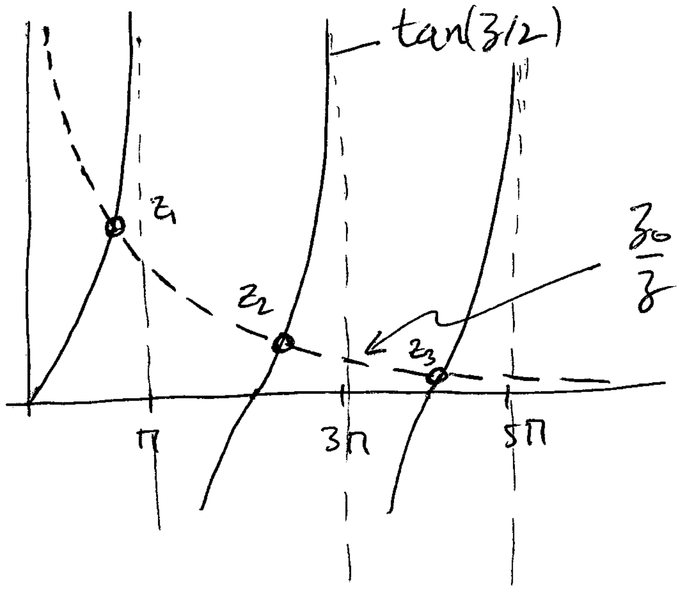
$$q \simeq q_0 = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$$

ⓐ Los op : $k \tan\frac{ka}{2} \simeq q_0$ $\Rightarrow$ bepaal $\underline{\underline{k}}$

$\Rightarrow$ E bepaald.

Grafische oploss. : beb. $\tan \frac{ka}{2} = \frac{q_0}{k}$ (3)

met $z = ka$ en $z_0 = q_0 a$, $\tan \frac{z}{2} = \frac{z_0}{z}$ $\tan\frac{z}{2} = \infty$ voor $z = \pi, 3\pi, \ldots$



- in principe meer dan 1 oplossing (zo lang $\tanh = 1$)

- laagste oplossing z_1, bestaat altijd.

(b) $z_0 \to \infty$ $z_1 \to \pi$ $\left(k = k_1 = \frac{\pi}{a}\right)$ $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$

(c) $z_1 = z^{\infty} - \varepsilon = \frac{\pi}{\cancel{2}} - \varepsilon$ met $\varepsilon \ll 1$

$\tan \frac{z_1}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \simeq \frac{1}{\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{2}{\varepsilon} \gg 1$

oploss. is $\frac{2}{\varepsilon} \simeq \frac{z_0}{z_1} \simeq \frac{z_0}{\pi}$ $\Rightarrow$ $\varepsilon = \frac{2\pi}{z_0}$

$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{z}{a}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi - \varepsilon}{a}\right)^2 \simeq E_1\left(1 - \frac{2\varepsilon}{\pi}\right) = E_1\left(1 - \frac{4}{z_0}\right)$

1.5 "Anti-periodieke" functie : $\psi(x + 2a) = -\psi(x)$

(a) $\psi(x + 2a) = -\psi(x) = -\psi(-x)$

neem $y = a + x$ $\Rightarrow$ $x + 2a = y + a$

$-x = a - y$

$\underline{\psi(y + a) = -\psi(a - y)}$ $\Rightarrow$ ψ <u>oneven</u> tov $x = a$.

Gebied I : ψ even $\Rightarrow$ $\psi_I = A_1 \cos kx$

Gebied II : ψ <u>oneven</u> $\Rightarrow$ $\psi_{II} = D_1 \sinh q(x - a)$

(4)

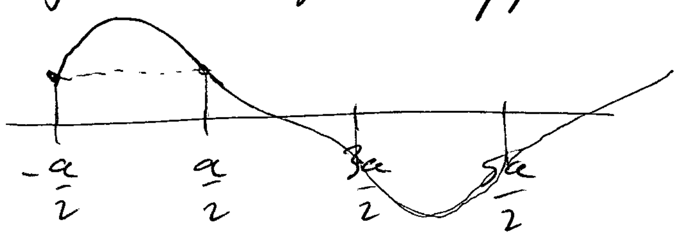
(b) Functie is "anti-periodiek" ⇒ we moeten op de randvoorwaarden in 2 punten opletten:

ψ: $x = \frac{a}{2}$ en $x = \frac{3a}{2}$ (of $\frac{5a}{2}$)

Inderdaad, $\psi(x+2a) = -\psi(x) \Rightarrow \underline{\psi(x+4a) = \psi(x)}$

Deze functie is periodiek met periode $4a$

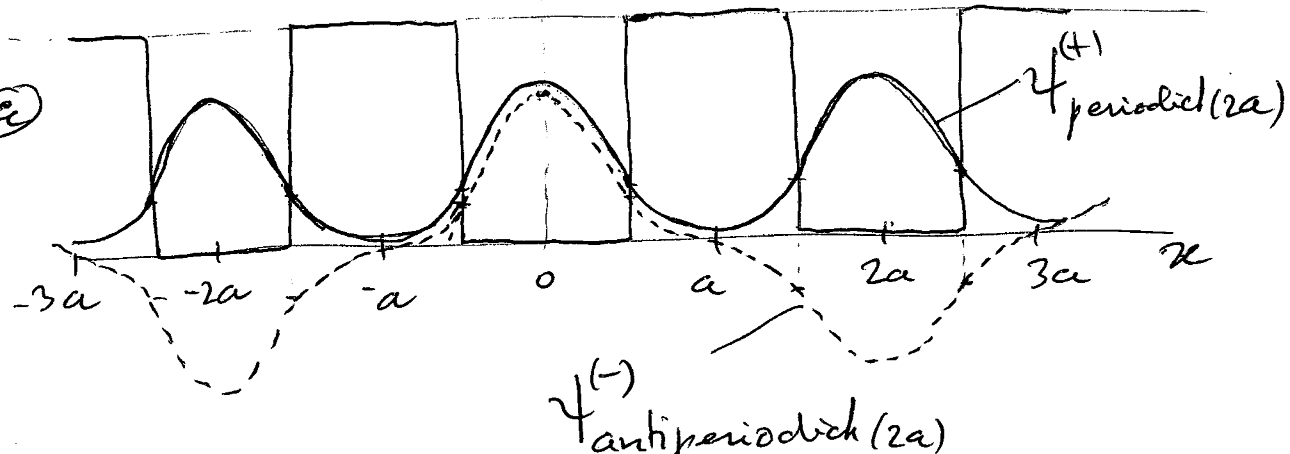
(c) Vanwege de symm. eigenschappen van cos, sin hebben wij:



continuïteit van ψ, $\frac{d\psi}{dx}$ in $\frac{a}{2}$ ⇒ contin. in $\frac{3a}{2}$, $\frac{5a}{2}$, ...

1.6

(a)



(b) $\psi^{(+)}$ zou de grondtoestand kunnen zijn, omdat zij geen knopen heeft (T minimaal). Daarentegen heeft $\psi^{(-)}$ knopen, maar het energie verschil is klein (tunneling door de barrière).

OPGAVE 2 : Viriaaltheorema

2.1 $\langle V \rangle = \langle \psi_n | \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 | \psi_n \rangle$

$2m\omega x = \sqrt{2\hbar m\omega}\,(a_+ + a_-) \Rightarrow \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{8m} 2\hbar m\omega\,(a_+ + a_-)^2$

$= \frac{\hbar\omega}{4}(a_+^2 + a_-^2 + a_+a_- + a_-a_+)$

$a_+a_- + a_-a_+ = 2a_+a_- + 1$

$\langle V \rangle = \langle \psi_n | \frac{\hbar\omega}{4}(a_+^2 + a_-^2 + 2a_+a_- + 1) | \psi_n \rangle = \frac{\hbar\omega}{2}(n + \frac{1}{2})$

(want $\langle \psi_n | a_+^2 | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | a_-^2 | \psi_n \rangle = 0$ en $\langle \psi_n | a_+a_- | \psi_n \rangle = n$)

Maar $\langle H \rangle = \langle \psi_n | H | \psi_n \rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) = \langle T \rangle + \langle V \rangle$

dus $\langle V \rangle = \langle T \rangle = \frac{\langle H \rangle}{2}$.

2.2 Bewegingsverg. $\frac{d}{dt}\langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H, Q] \rangle$

(daarbij hoeft Q geen observabele te zijn ...)

- Neem $Q = \vec{r}\cdot\vec{p}$: $\frac{d}{dt}\langle \vec{r}\cdot\vec{p} \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H, \vec{r}\cdot\vec{p}] \rangle$

$\langle [H, \vec{r}\cdot\vec{p}] \rangle = \langle [T, \vec{r}\cdot\vec{p}] \rangle + \langle [V, \vec{r}\cdot\vec{p}] \rangle$

- Doe het in 1 dimensie: $\vec{r}\vec{p} \to xp$

$[T, xp] = \frac{1}{2m}(p^2xp - xpp^2) = \frac{1}{2m}(p^2x - xp^2)p$

en $p^2x - xp^2 = \underbrace{p^2x - pxp}_{-i\hbar p} + \underbrace{pxp - xp^2}_{-i\hbar p} = -2i\hbar p$

$[T, xp] = -2i\hbar \frac{p^2}{2m} = -2i\hbar T$

$[V, xp] = Vxp - xpV \Rightarrow Vxp\psi - xpV\psi = -x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial V}{\partial x}\psi$

$p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$

$[V, xp] = -x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial V}{\partial x}$

Dus $\frac{d}{dt}\langle xp \rangle = 2\langle T \rangle - \langle x\frac{\partial V}{\partial x} \rangle$

In 3 dimensies gelden de gelijke relaties voor x, y en z: (6)

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{r}\cdot\vec{p}\rangle = \frac{d}{dx}\left(\langle x p_x\rangle + \langle y p_y\rangle + \langle z p_z\rangle\right) = 2\left(\langle T_x\rangle + \langle T_y\rangle + \langle T_z\rangle\right)$$
$$- \left(\langle x \frac{\partial V}{\partial x}\rangle + \langle y \frac{\partial V}{\partial y}\rangle + \langle z \frac{\partial V}{\partial z}\rangle\right)$$

2.3. Voor een stationaire toestand hebben we

$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = 0$ per definitie, omdat $|\psi\rangle$ alleen door een fase met t verandert $|\psi(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar}|\psi(0)\rangle$

$$\Rightarrow \quad 2\langle T\rangle = \langle \vec{r}\cdot\vec{\nabla}V\rangle$$

2.4 $V = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \Rightarrow \vec{\nabla}V = m\omega^2\vec{r}$

$\vec{r}\cdot\vec{\nabla}V = m\omega^2 r^2 = 2V$; Dus $\langle T\rangle = \langle V\rangle$.

OPGAVE 3 : Spin-1 Deeltje

3.1 matrixrepresentatie in basis $|s\, m_s\rangle$

$s=1$ bepaalt eigenw. van S^2 $(1(1+1)\hbar^2)$

$m_s = -1, 0, 1$ bepaalt eigenw. van S_z $(m_s\hbar)$

(a) $S^2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} 2\hbar^2$; $S_z = \hbar\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

(b) $S_+|1\,1\rangle = 0$

$S_+|1\,0\rangle = \hbar\sqrt{2-0}\,|1\,1\rangle$ $\qquad S_+ = \hbar\begin{bmatrix}0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\\0&0&0\end{bmatrix}$

$S_+|1\,-1\rangle = \hbar\sqrt{2-0}\,|1\,0\rangle$

Gebruik $S_- = (S_+)^\dagger$ $\qquad S_- = \hbar\begin{bmatrix}0&0&0\\\sqrt{2}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\end{bmatrix}$

(c) $$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Diagonaliseer S_x en S_y, bvb door de karakterist. vergel. te schrijven: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2-1) - (-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda$

sol. $\lambda = 0, \pm\sqrt{2}$

eigenw. $+\hbar, 0, -\hbar$.

voor S_y: $\begin{vmatrix} -\lambda & -i & 0 \\ i & -\lambda & -i \\ 0 & i & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2-1) + \lambda^{z} = -\lambda^3 + 2\lambda$

sol. $\lambda = 0, \pm\sqrt{2}$.

(e) Eigentoestanden van S_x: wij lossen het systeem op:

$(+\hbar)$ $\left.\begin{array}{l} \frac{\hbar}{\sqrt{2}} y = \hbar x \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}}(x+z) = \hbar y \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} y = \hbar z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = z \\ y = \sqrt{2}\, x \end{array}$ $\quad |s=1\ m_s=1\rangle_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$(-\hbar)$ $\left.\begin{array}{l} \frac{\hbar}{\sqrt{2}} y = -\hbar x \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}}(x+z) = -\hbar y \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} y = -\hbar z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = z \\ y = -\sqrt{2}\, x \end{array}$ $\quad |1\ {-1}\rangle_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

(orthogonaal tot $|11\rangle_x$)

(0) $\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x+z = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \\ x = -z \end{array}$ $\quad |1\ 0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

3.2 Meetexperimenten

ⓐ Meten $S_z \rightarrow \hbar$ (eigenwaarde van S_z)

meetpostul. $\Rightarrow$ toest. na de meting is $|1\,1\rangle$.
$s=1, m_s=1$

S_y meten : mogelijke result. zijn de eigenw. van S_y, met als kansen de |projecties|^2 :

$+\hbar \;:\; |\langle 1\,1\,|\,1\,1\rangle_y|^2 = \frac{1}{4}$

$0 \;:\; |\langle 1\,1\,|\,1\,0\rangle_y|^2 = \frac{1}{2}$

$-\hbar \;:\; |\langle 1\,1\,|\,1\,-1\rangle_y|^2 = \frac{1}{4}$

ⓑ Wij meten $S_y \rightarrow -\hbar \Rightarrow$ Toestand na : $|1\,-1\rangle_y$

$\equiv |-,y\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

meet $S_z \Rightarrow$ projectie op eigentoest. van S_z

$\hbar$ met kans $\frac{1}{4} \rightarrow |1\,1\rangle$

0 —— $\frac{1}{2} \rightarrow |1\,0\rangle$

$-\hbar$ —— $\frac{1}{4} \rightarrow |1\,-1\rangle$

nieuwe meting aan S_y : zoek in elk geval de mogelijke resultaten :

$|1\,1\rangle \rightarrow \begin{cases} +\hbar : \frac{1}{4} \\ 0 : \frac{1}{2} \\ -\hbar : 1/4 \end{cases}$ $\quad |1\,0\rangle \rightarrow \begin{cases} \hbar : \frac{1}{2} \\ 0 : 0 \\ -\hbar \; \frac{1}{2} \end{cases}$

$|1\,-1\rangle \rightarrow \begin{cases} \hbar : \frac{1}{4} \\ 0 : 1/2 \\ -\hbar : \frac{1}{4} \end{cases}$

Bij elkaar

$$\left.\begin{aligned} +\hbar &: \tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{8} \\ 0 &: \tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\times 0 + \tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} \\ -\hbar &: \tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{8} \end{aligned}\right\}$$