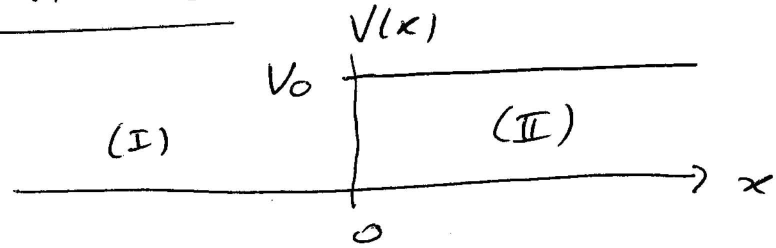
Toets QM1, 23 Nov. 2009

OPGAVE 1 : Potentiaaltrede



1.1 Om de golffunctie te normaliseren moeten wij $E \geq V_{min}$ hebben. Hier is $V_{min} = 0$, dus $E \geq 0$.

1.2 Algemene oplossingen van de toSV in

a) bereik (I), $x<0$: $E - V(x) \geq 0$, $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

of $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. oplos.: e^{ikx} en e^{-ikx}

b) bereik (II), $x \geq 0$: de vorm hangt van de waarde van $E - V(x) = E - V_0$

- $E - V_0 \geq 0$ $\quad K = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$, oplos. e^{iKx}, e^{-iKx}
- $E - V_0 < 0$ $\quad \lambda = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$, oplos. $e^{-\lambda x}$, $e^{\lambda x}$

$e^{\lambda x}$ is niet normaliseerbaar $\rightarrow$ alleen $\underline{e^{-\lambda x}}$.

c) Randvoorwaarden :

- ψ moet continu zijn op $x = 0$
- $\frac{d\psi}{dx}$ moet continu zijn want $V(x) \neq \infty$.

1.3 Wij hebben $E > V_0$ (zie 1.2(a)):

$$\psi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$\psi_{II}(x) = F e^{iKx} + G e^{-iKx}$$

Geen inkomende golf op de rechter kant $\Rightarrow$ $G = 0$

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow A + B = F$$

$$\frac{d\psi_I}{dx}(0) = \frac{d\psi_{II}}{dx}(0) \Rightarrow ikA - ikB = iKF \Rightarrow A - B = \frac{K}{k} \cdot F$$

$$2A = \left(1 + \frac{K}{k}\right)F \Rightarrow F = \frac{2}{1 + \frac{K}{k}} A$$

$$2B = \left(1 - \frac{K}{k}\right)F \Rightarrow B = \frac{1 - \frac{K}{k}}{1 + \frac{K}{k}} A = \frac{k - K}{k + K} \cdot A$$

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left|\frac{k-K}{k+K}\right|^2, \quad T = \left|\frac{2k}{k+K}\right|^2$$

1.4. De formules gelden ook als $K = i\lambda$.

Je kunt ook dezelfde redenering doen, met

$$e^{iKx} \to e^{-\lambda x}$$

$$R = \left|\frac{k - i\lambda}{k + i\lambda}\right|^2 = 1 \qquad T = \left|\frac{2k}{k + i\lambda}\right|^2 = \frac{4k^2}{k^2 + \lambda^2}$$

T is niet een getransmitteerde intensiteit, alleen de (amplitude)^2 van de golf op de rechter kant van de trede.

OPGAVE 2 : Harmonische Oscillator

2.1 Energiemeting :

uitslag is een van de eigenwaarden van $\hat{H}$,

$E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$, kans $p_n = |\langle\psi_n|\psi\rangle|^2$.

$E_M = \hbar\omega$ is geen eigenwaarde van $\hat{H}$ $\Rightarrow$ kans $=0$.

2.2 Na meting van $\hat{H}$ $\rightarrow$ $\frac{\hbar\omega}{2}$ is de toestand

$|\psi_0\rangle$; over een tijd t $\quad e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}|\psi_0\rangle$.

In alle gevallen zijn de kansen:

$p_0 = 1$, $\quad p_n = 0$ voor $n \geq 1$.

2.3 $|\psi(0)\rangle = \alpha|\psi_0\rangle + \beta|\psi_2\rangle$

normalisatie $\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

(als dat niet geldt, neem de nieuwe waarden

$\alpha' = \frac{\alpha}{\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2}}$, $\beta' = \frac{\beta}{\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2}}$).

2.4 op tijd t moeten we de coëfficiënten veranderen tot $\alpha \rightarrow \alpha e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}$ $\quad \beta \rightarrow \beta e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}$

$$|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}|\psi_0\rangle + \beta e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}|\psi_2\rangle .$$

2.5 Operator $\hat{X}^2 = x_0^2 (a+a^+)^2$

$$\left.\begin{array}{l}(a+a^+)^2 = a^2 + aa^+ + a^+a + a^{+2} \\ [a, a^+] = 1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

(a) $\hat{x}^2 = x_0^2 \left(a^2 + 2a^\dagger a + 1 + a^{\dagger 2} \right)$

(b) $\langle \psi(t) | \hat{x}^2 | \psi(t) \rangle = x_0^2 \left[\alpha^* e^{\frac{iE_0 t}{\hbar}} \langle \psi_0 | + \beta^* e^{\frac{iE_2 t}{\hbar}} \langle \psi_2 | \right]$

$\left[a^{\dagger 2} + a^2 + 2a^\dagger a + 1 \right] \left[\alpha e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} |\psi_0\rangle + \beta e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} |\psi_2\rangle \right]$

$= x_0^2 \left[\alpha^* e^{\frac{iE_0 t}{\hbar}} \langle \psi_0 | + \beta^* e^{\frac{iE_2 t}{\hbar}} \langle \psi_2 | \right] \Big\{ \alpha e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} |\psi_0\rangle + 0 + 0 + \alpha\sqrt{2} e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} |\psi_2\rangle$

$+ \beta e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} |\psi_2\rangle + 2 \times 2\beta e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} |\psi_2\rangle + \sqrt{2}\beta e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} |\psi_0\rangle + \gamma |\psi_4\rangle \Big\}$

(gebruik $a|\psi_0\rangle = 0$, $a|\psi_n\rangle = \sqrt{n}\, |\psi_{n-1}\rangle, \ldots$)

$\langle \hat{x}^2(t) \rangle = x_0^2 \left[|\alpha|^2 + \sqrt{2}\, \alpha^* \beta e^{-\frac{i(E_2 - E_0)t}{\hbar}} + \sqrt{2}\, \beta^* \alpha e^{\frac{i(E_2 - E_0)t}{\hbar}} + 5|\beta|^2 \right]$

(c) $\langle \hat{x}^2(t) \rangle = a + b e^{i\Omega t} + b^* e^{-i\Omega t}$

met $\Omega = \frac{E_2 - E_0}{\hbar} = 2\omega$, $a = x_0^2 \left(|\alpha|^2 + 5|\beta|^2 \right)$

$b = \sqrt{2}\, \beta^* \alpha\, x_0^2$

2.6. Combinatie van sinus en cosinus $\Rightarrow$

$\langle \hat{x}^2(t) \rangle = A + B \cos(\Omega t + \varphi)$

Klassieke interpretatie is dat $x^2(t)$ als $\cos^2 \omega t$ varieërt, net als $[\langle x(t) \rangle]^2$.

Als $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$,

$\Omega = 2\omega$

$A = 3x_0^2$

$B = \sqrt{2}\, x_0^2$

$\varphi = 0$

OPGAVE 3 : Metingen

Basis $\{ |n\rangle \}$ met energieën E_n, niet ontaard. $|\psi(0)\rangle = A \sum_n c_n |n\rangle$.

3.1 $|\psi(0)\rangle \xrightarrow{\text{met.}} E_n \Rightarrow |\psi(t=0^+)\rangle = |n\rangle$

op tijd $t = T$, $|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |n\rangle$

meting op $t = T \to E_n$, met kans 1.

$E_n = E_3 \Rightarrow$ de meting bij $t=0$ gaf al $\underline{E_3}$.

3.2 Meting van operator $P = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, die een observabele is ($P^\dagger = |\alpha\rangle\langle\alpha| = P$).

Eigenwaarden van P? Dat zijn 1 met eigenvector $|\alpha\rangle$ ($P|\alpha\rangle = |\alpha\rangle\langle\alpha|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$)

of 0 voor alle orthogonale vectoren van de Hilbertruimte $P|\psi\rangle = |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\psi\rangle}_{} = 0$ als $\langle\alpha|\psi\rangle = 0$.

We vinden 1 met kans $|\langle\alpha|\psi\rangle|^2 = p$

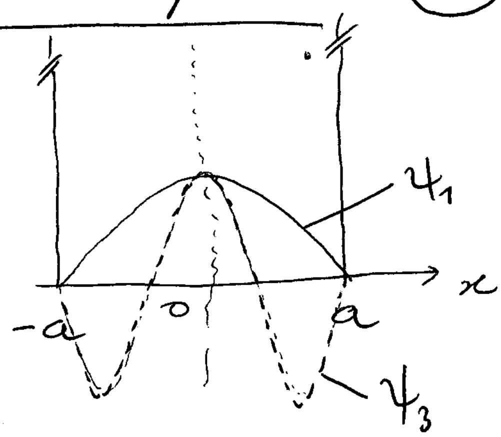
of 0 met kans $1 - |\langle\alpha|\psi\rangle|^2$

$$p = |\langle\alpha|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1| + \langle 2|)|\psi\rangle\right|^2 = \left|A \cdot \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2}}\right|^2$$

3.3 $|\psi(t)\rangle = A \sum_n c_n e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |n\rangle$

$$p(T) = |\langle\alpha|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{|A|^2}{2} \left| c_1 e^{-i\frac{E_1 T}{\hbar}} + c_2 e^{-i\frac{E_2 T}{\hbar}} \right|^2$$

OPGAVE 4 : Positiemeting in een put



4.1 toSV oplossingen in de put :

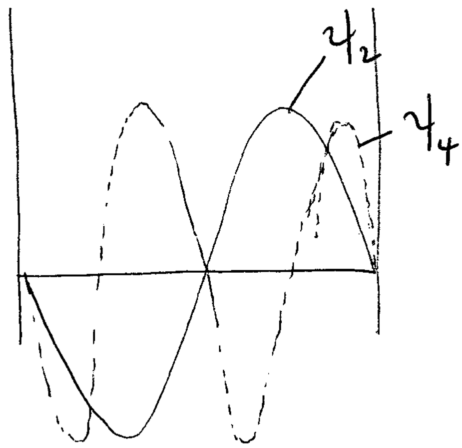
even $\psi_1(x) = A_1 \cos \frac{\pi x}{2a}$

$$\psi_3(x) = A_3 \cos \frac{3\pi x}{2a}$$

$$\vdots$$

$$\psi_{2p+1}(x) = A_{2p+1} \cos \frac{(2p+1)\pi x}{2a}$$

$$\vdots$$



oneven $\psi_2(x) = A_2 \sin \frac{\pi x}{a}$

$$\psi_4(x) = A_4 \sin \frac{2\pi x}{a}$$

$$\vdots$$

$$\psi_{2p}(x) = A_{2p} \sin \frac{p\pi x}{a}$$

4.2

$$\vdots$$

4.2 : zie tekening.

energieën : $E_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2$

$$k_{2p+1} = \frac{(2p+1)\pi}{2a} \qquad k_{2p} = \frac{2p\pi}{2a}$$

(hier : $\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2$, $\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2$, $\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$, $\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2$)

voor ψ_1 ψ_3 ψ_2 ψ_4)

4.3 $|\psi_1\rangle$ voor de meting

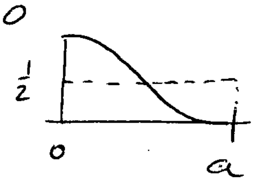
na meting is $|\psi(t=0^+)\rangle \Rightarrow \begin{cases} A\,\psi_1(x) = \psi(t=0^+), & x \geq 0 \\ 0 & \text{voor } x < 0 \end{cases}$

(a) normal. van $|\psi_1\rangle$: $\int_{-a}^{a} dx\, |A_1|^2 \cos^2 \frac{\pi x}{2a} = \frac{1}{2} \times 2a |A_1|^2 = 1$

$|A_1| = \frac{1}{\sqrt{a}}$

voor $\psi(t=0^+)$: $\int_0^a \left| A \cos \frac{\pi x}{2a} \right|^2 dx = |A|^2 \int_0^a \cos^2 \frac{\pi x}{2a}\, dx$

$1 = |A|^2 \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow |A| = \sqrt{\frac{2}{a}}$



$|\psi(t^+)\rangle \rightarrow \underline{\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{\pi x}{2a} \quad \text{voor } x \geq 0.}$

(en 0 voor $x < 0$)

(b) Projectie van $|\psi(t=0^+)\rangle$ op

i) even toestanden :

$\langle \psi_{2p+1}(x) | \psi(x) \rangle = A . A_{2p+1} \int_0^a \cos \frac{(2p+1)\pi x}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a}\, dx$

$= \frac{A . A_{2p+1}}{2} \int_0^a dx \left[\cos (p+1) \frac{\pi x}{a} + \cos p \frac{\pi x}{a} \right]$

$= \frac{A . A_{2p+1}}{2} \left[\frac{a}{(p+1)\pi} \sin (p+1) \frac{\pi x}{a} + \frac{a}{p\pi} \sin p \frac{\pi x}{a} \right]_0^a$

alle sinus's zijn nul voor $p\pi, (p+1)\pi$ als $p > 0$.

(voor $p = 0$, $\langle \psi_1 | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

ii) oneven toestanden

$\langle \psi_{2p} | \psi \rangle = A . A_{2p} \int_0^a \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{2a}\, dx$

$$\sin\frac{2p\pi x}{2a}\cos\frac{\pi x}{2a} = \frac{1}{2}\left[\sin(2p+1)\frac{\pi x}{2a} + \sin(2p-1)\frac{\pi x}{2a}\right]$$

$$\langle\psi_{2p}|\psi\rangle = \frac{AA_{2p}}{2}\left\{\underbrace{\left[\frac{-2a}{\pi(2p+1)}\cos\frac{(2p+1)\pi x}{2a}\right]_0^a}_{\frac{2a}{\pi(2p+1)}} + \underbrace{\left[\frac{-2a}{\pi(2p-1)}\cos\frac{(2p-1)\pi x}{2a}\right]_0^a}_{\frac{2a}{\pi(2p-1)}}\right\}$$

$$\langle\psi_{2p}|\psi\rangle = A.A_{2p}.\frac{2p\,a}{\pi(4p^2-1)} \qquad \text{met } A_{2p} = \frac{1}{\sqrt{a}},\ A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\langle\psi_{2p}|\psi\rangle = \frac{2p\sqrt{2}}{\pi(4p^2-1)}.$$

4.4. Verwachtingswaarde van $\hat{H}$ na de meting van de positie: $\langle\psi(t=0^+)|\hat{H}|\psi(t=0^+)\rangle$. Wij gebruiken de compleetheidsrelatie:

$$\langle H\rangle = \sum_n |\langle\psi_n|\psi(t=0^+)\rangle|^2 E_n \qquad \text{met } E_n = \frac{\hbar^2}{2m}k_n^2$$

Alleen even toestanden dragen bij:

$$\langle H\rangle = \sum_{p=1}^{\infty} 2.\left(\frac{2p}{4p^2-1}\right)^2.\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \frac{E_1}{2}$$

Deze verwacht. verandert niet met t ($[H,H]=0$!)

4.5. Je kunt zien dat $\langle H\rangle$ oneindig is !!

Dus $\langle H\rangle \neq E_1$: de meting heeft de energie fors veranderd want $[P,H]\neq 0$. Door de positie heel precies te meten ($\Delta x \ll$) hebben wij oneindig grote waarden van p ingevoerd, en ook van $T = \frac{\hbar^2}{2m}p^2$.