QM1 Toets 23 november 2009 (14:00-17:00)

Geen documenten toegestaan.

Opgave 1: Potentiaaltrede (20 punten)

Een eendimensionale potentiaal $V(x)$ wordt gegeven door:
$V(x) = 0$ voor $x \le 0$, $V(x) = V_0$ voor $x > 0$; $V_0 > 0$.

1.1. Aan welke voorwaarde moet de energie E voldoen zodat de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking normaliseerbare oplossingen heeft?

1.2. Schrijf de algemene oplossingen van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking in elk van de twee gebieden op. Geef de randvoorwaarden bij $x = 0$.

1.3. Vind de reflectie- en transmissiecoëfficiënten als $E > V_0$ en de inkomende golf van links ($x \le 0$) komt.
Hint: In het geval dat de inkomende golf een (complexe) amplitude *A*, de reflecteerde golf een amplitude *B* en de doorgelaten golf een amplitude *F* heeft, worden de reflectie- en transmissiecoëfficiënten *R* en *T* gegeven door:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}, \qquad T = \frac{|F|^2}{|A|^2}.$$

1.4. Beantwoord dezelfde vraag als $E < V_0$. Wat valt je op?

Opgave 2: Harmonische oscillator (25 punten)

Beschouw een harmonische oscillator in 1 dimensie. Het deeltje in dit systeem heeft een massa m en de hoekfrequentie van de oscillatie is ω. De Hamiltoniaan van dit systeem wordt gegeven door:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

Daarnaast zijn gegeven: $\hat{X} = x_0\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)$, $\hat{P} = p_0\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)$, $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ en $p_0 = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}$

waarbij $\hat{a}$ en $\hat{a}^\dagger$ ladderoperatoren zijn die aan $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$ voldoen (let op: de notatie van deze operatoren verschilt van die in Griffiths). $\hat{P}$ en $\hat{X}$ zijn de gebruikelijke impuls- en positieoperatoren.
De genormaliseerde eigentoestanden van de Hamiltoniaan zijn de kets $\left|\psi_n\right\rangle$, $n = 0,1,\ldots$.

Z.O.Z.

De actie van de ladderoperatoren op $|\psi_n\rangle$ is:

$$\hat{a}^\dagger|\psi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\psi_{n+1}\rangle \quad \text{en} \quad \hat{a}|\psi_n\rangle = \sqrt{n}|\psi_{n-1}\rangle .$$

2.1. De oscillator bevindt zich op tijd $t=0$ in een willekeurige toestand $|\psi\rangle$. Wij meten de energie. Wat is de kans p_n om een energie $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ te meten? Wat is de kans om een energie $E_M = \hbar\omega$ te meten?

2.2 Stel dat we $\hbar\omega/2$ als energie hebben gevonden. Nu meten wij direct nogmaals de energie. Wat zijn de nieuwe kansen q_n om de energieën $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ te vinden?

De oscillator bevindt zich op $t=0$ in de volgende toestand:

$$|\psi(0)\rangle = \alpha|\psi_0\rangle + \beta|\psi_2\rangle$$

α en β zijn twee complexe getallen.

2.3. Normaliseer deze toestand.

2.4 Bepaal de nieuwe toestand op tijd *t*.

2.5. Wij zoeken de verwachtingswaarde van de operator $\hat{X}^2$ in de toestand $|\psi(t)\rangle$ als functie van de tijd, $\langle X^2(t)\rangle$.

a. Druk $\hat{X}^2$ uit in termen van de ladderoperatoren.
b. Gebruik de resultaten van 2.4 om een formule voor $\langle X^2(t)\rangle$ te vinden.
c. Concludeer daaruit dat de *tijdsafhankelijke* verwachtingswaarde van $\hat{X}^2$ de volgende vorm heeft:

$$\langle X^2(t)\rangle = a + b\exp(i\Omega t) + b^*\exp(-i\Omega t) .$$

2.6. Laat zien dat bovenstaande oplossing voor $\langle X^2(t)\rangle$ ook geschreven kan worden als $\langle X^2(t)\rangle = A + B\cos(\Omega t+\varphi)$. Wat is de klassieke interpretatie van dit resultaat? Geef de uitdrukkingen voor Ω, A, B, φ als $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$.

Opgave 3: Metingen aan een quantumsysteem (25 punten)

Beschouw een systeem dat door een Hilbertruimte met oneindig veel dimensies beschreven wordt. Als orthonormale basis nemen wij de eigenvectoren van de Hamiltoniaan $\hat{H}$,

$\{|n\rangle\}, n = 1, 2, 3, \ldots,$

waar alle eigenenergieën E_n van elkaar verschillen. Het eigenwaardespectrum van $\hat{H}$ is dus niet-ontaard.
Op $t = 0$ bevindt het systeem zich in een toestand:

$$|\psi\rangle = A\sum_n c_n |n\rangle \ ,$$

waarbij A een normalisatieconstante is.

3.1. Wij meten de energie op het tijdstip $t = 0$. Vervolgens laten wij het systeem vrij tussen $t = 0$ en $t = T$. Tenslotte meten wij de energie opnieuw op $t = T$. Wij vinden E_3. Wat was het eerste meetresultaat op $t = 0$?

3.2. Wij meten nu aan de hermitese operator $\hat{P} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, waarbij $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right)$.
Wat zijn de mogelijke resultaten en hun kansen bij meting aan deze operator op $t = 0$? Ga er vanuit dat de metingen in opgave 4.1 niet plaatsgevonden hebben en dat het systeem zich in toestand $|\psi\rangle$ bevindt.

3.3. En wat zijn deze als de meting niet op $t = 0$, maar pas op $t = T$ plaatsvindt?

Opgave 4: Positiemeting in een rechthoekige put (30 punten)

Een deeltje in een oneindig diepe put tussen $x = -a$ en $x = +a$ bevindt zich in de grondtoestand $|\psi_1\rangle$ (de toestand met de laagste mogelijke energie).

4.1 Schrijf om te beginnen de genormaliseerde golffuncties voor dit systeem op.
Let op: Onderscheid tussen even en oneven toestanden. Om een afleiding wordt niet gevraagd! Alleen het antwoord geven is voldoende.

4.2. Teken de golffuncties voor de vier toestanden met de laagste energieën. Wat zijn de waarden van hun energieën?

Z.O.Z.

4.3. Zoals eerder genoemd bevindt het deeltje zich in de grondtoestand $|\psi_1\rangle$ van deze put. Wij meten de aanwezigheid van het deeltje in de rechterhelft van de put. Onmiddellijk na de meting wordt de toestand van het deeltje door de volgende functie gegeven:

$\psi(x) = 0$ voor $x < 0$ en $\psi(x) = A\psi_1(x)$ voor $x > 0$.

a. Normaliseer deze toestand.
b. Vind de projectie van deze toestand op alle eigentoestanden van de Hamiltoniaan in deze put.
Let op: Onderscheid tussen even en oneven toestanden.
Hint: Hierbij kunnen de volgende relaties van pas komen:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

4.4. Wat is de verwachtingswaarde van de totale energie onmiddellijk na de meting? En wat is deze een tijd *T* later?

4.5. Is deze waarde gelijk aan de energie voor de meting? Waarom wel/niet?