Uitwerking Tentamen Quantummechanica 1

14 februari 2012

Opgave 1.

a. Invullen van de gegeven uitdrukkingen voor $\hat{a}_\pm$ geeft

$$\hat{a}_\pm^2 = \frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 - \frac{1}{2m\hbar\omega}\hat{p}^2 \mp \frac{i}{2\hbar}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) \ .$$

Door optellen volgt $\hbar\omega(\hat{a}_+^2 + \hat{a}_-^2)/2 = m\omega^2\hat{x}^2/2 - \hat{p}^2/(2m) = \hat{V} - \hat{T}$.

b. Omdat $\hat{H}\psi_n = \hbar\omega(n+1/2)\psi_n$ geldt dat $\langle \hat{H} \rangle = (E_0 + E_1 + E_2)/3 = 3\hbar\omega/2$.

c. $\Psi(x,t) = \exp(-i\omega t/2)\left[\psi_0(x) + \psi_1(x)\exp(-i\omega t) + \psi_2(x)\exp(-2i\omega t)\right]/\sqrt{3}$.

d. De enige niet-verdwijnende matrixelementen van de operator $\hat{a}_+^2$ zijn de termen $\langle \psi_{n+2}|\hat{a}_+^2|\psi_n\rangle = \sqrt{(n+1)(n+2)}$. Dus $\langle \hat{a}_+^2 \rangle = \langle \psi_2|\hat{a}_+^2|\psi_0\rangle \exp(2i\omega t)/3 = \sqrt{2}\exp(2i\omega t)/3$. Evenzo geldt dat $\langle \hat{a}_-^2 \rangle = \sqrt{2}\exp(-2i\omega t)/3$.

e. Uit a. en d. weten we dat $\langle \hat{V} - \hat{T} \rangle = \hbar\omega(\sqrt{2}/3)\cos(2\omega t)$, en b. geeft $\langle \hat{V} + \hat{T} \rangle = 3\hbar\omega/2$. Daaruit volgt dat

$$\langle \hat{V} \rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}\cos(2\omega t)\right) \ , \ \langle \hat{T} \rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cos(2\omega t)\right) \ .$$

Opgave 2.

a. $\Psi(\mathbf{r},t) = \left(\psi_{100}(\mathbf{r})\exp(-iE_1t/\hbar) + \psi_{200}(\mathbf{r})\exp(-iE_2t/\hbar)\right)/\sqrt{2}$, met $E_2 = E_1/4$.

b. De golffunctie Ψ is een superpositie van twee energie-eigentoestanden, zodat de kansdichtheid $\rho(\mathbf{r},t)$ oscilleert met de frequentie $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar = 3|E_1|/(4\hbar)$.

c. $\rho(\mathbf{r},t) = |\Psi(\mathbf{r},t)|^2 = \left(\psi_{100}(\mathbf{r})^2 + \psi_{200}(\mathbf{r})^2 + 2\psi_{100}(\mathbf{r})\psi_{200}(\mathbf{r})\cos(\omega t)\right)/2$. De golffuncties ψ_{100} en ψ_{200} bevatten beide de bolfuncties Y_l^m met $l=0$ en $m=0$, en hangen dus niet van θ en ϕ af.

d. Om de kans te vinden dat het elektron zich bevindt in de bolschil met straal r en dikte dr moeten we ρ integreren over deze bolschil. Dus $P(r)dr = r^2 dr \int d\theta d\phi \sin\theta \rho(\mathbf{r}, t)$. Omdat $\int d\theta d\phi \sin\theta (Y_0^0)^2 = 1$ geeft dit $P(r) = r^2 \left(R_{00}^2(r) + R_{10}(r) + 2R_{00}(r)R_{10}(r)\cos(\omega t)\right)/2$
$= \left(u_{00}^2(r) + u_{10}(r) + 2u_{00}(r)u_{10}(r)\cos(\omega t)\right)/2$.

e. De twee golffuncties ψ_{100} en ψ_{210} bevatten nu twee verschillende bolfuncties Y_0^0 en Y_1^0, die onderling orthogonaal zijn (zodat $\int d\theta d\phi \sin\theta Y_0^0 Y_1^0 = 0$). Door de integratie over de bolschil draagt de mengterm $\psi_{100}\psi_{210}$ dus niet bij aan de kansverdeling $P(r)$. De verdeling P oscilleert dus niet in dit geval.

Opgave 3.

a. Bij de gegeven basis heeft de matrix voor $\hat{L}_z$ de diagonaalgedaante

$$\hat{L}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

De beide ladderoperatoren $\hat{L}_\pm$ hebben volgens de gegeven uitdrukking de gedaante

$$\hat{L}_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \ \hat{L}_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

Omdat $\hat{L}_x = (\hat{L}_+ + \hat{L}_-)/2$ geeft dit de matrixgedaante

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

b. Elke richting in de ruimte is equivalent, en elke component van de vectoroperator $\hat{\mathbf{L}}$ heeft dezelfde eigenwaarden. Dus de eigenwaarden van $\hat{L}_x$ zijn dezelfde als de eigenwaarden van $\hat{L}_z$.

c. Oplossen van de eigenwaardevergelijking $\hat{L}_x|\psi\rangle = \hbar|\psi\rangle$ geeft de genormeerde eigenvector

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

op de basis van de eigentoestanden van $\hat{L}_z$, en dus van $\hat{H}$.

d. Omdat de energie-eigenwaarde bij de toestand $|l, m\rangle$ gelijk is aan $\gamma B\hbar m$, wordt de vectorgedaante van de toestand $|\Psi(t)\rangle$:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \exp(-i\gamma Bt) \\ \sqrt{2} \\ \exp(i\gamma Bt) \end{pmatrix} = \Big(\exp(-i\gamma Bt)|1,1\rangle + \sqrt{2}|1,0\rangle + \exp(i\gamma Bt)|1,-1\rangle\Big)/2\ .$$

e. De gevraagde verwachtingswaarde is direct te vinden uit

$$\hat{L}_x|\Psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \exp(-i\gamma Bt) \\ \sqrt{2} \\ \exp(i\gamma Bt) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}\cos(\gamma Bt) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dat geeft het eenvoudige resultaat $\langle\Psi(t)|\hat{L}_x|\Psi(t)\rangle = \hbar\cos(\gamma Bt)$.