Uitwerking toets Quantummechanica 1

16 november 2011

Opgave 1.

a. De tijdonafhankelijke Schrödingervergelijking $d^2\psi/dx^2 = -k^2\psi$, met $k^2 = 2mE/\hbar^2$ geeft oplossingen $\psi(x) = B\sin kx + C\cos kx$. Omdat de golffunctie nul moet zijn voor $x = 0$ moet $C = 0$ zijn. Verder moet $\sin ka = 0$ gelden, zodat $k = k_n = n\pi/a$, met n geheel en positief. De normeringseis $\int_0^a dx|\psi|^2 = 1$ geeft vervolgens $a|B|^2/2 = 1$. Dat geeft de uitdrukkingen $\psi_n(x) = (\sqrt{2/a})\sin(k_n x)$. De energie-eigenwaarden zijn $E_n = (\hbar k)^2/(2m) = (\hbar n\pi)^2/(2ma^2)$.

b. De normeringsconstante is $A = 1/\sqrt{2}$, en elke stationaire toestand krijgt een exponentiële factor $\exp(-iE_nt/\hbar)$. De tijdafhankelijke golffunctie wordt dus

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x)\exp(-iE_1t/\hbar) + \psi_2(x)\exp(-iE_2t/\hbar)\right) \ .$$

c. Invullen van de uitdrukkingen voor ψ_n en E_n geeft dan voor $\rho \equiv |\Psi|^2$ het resultaat

$$\rho(x,t) = \frac{1}{a}\left(\sin^2\frac{\pi x}{a} + \sin^2\frac{2\pi x}{a} + 2\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}\cos(\omega t)\right)$$

met $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar = 3\hbar\pi^2/(2ma^2)$.

d. De gegeven begintoestand $\Psi(x,0)$ geeft

$$\rho(x,0) = \frac{1}{a}\left(\sin^2\frac{\pi x}{a} + \sin^2\frac{2\pi x}{a} + 2\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}\right) \ .$$

De gevraagde kans is $\int_0^{a/2} dx\rho(x,0)$. De integralen van $\sin^2(\pi x/a)$ en $\sin^2(2\pi x/a)$ over het interval $[0, a/2]$ geven beide $a/4$. Verder geldt de identiteit $2\sin(\pi x/a)\sin(2\pi x/a) = \cos(\pi x/a) - \cos(3\pi x/a)$, en de integraal hiervan geeft $a/\pi + a/3\pi = 4a/(3\pi)$. De gevraagde kans bedraagt hiermee $1/2 + 4/(3\pi)$.

e. Op het tijdstip t is de gevraagde kans dus $1/2 + 4\cos(\omega t)/(3\pi)$. Het tijdsgemiddelde is dus $1/2$, zoals te verwachten is op grond van de symmetrie rond het midden van de put.

Opgave 2.

a. De klimoperator heeft de gedaante $\hat{a}_+ = (m\omega\hat{x} - i\hat{p})/\sqrt{2m\hbar\omega}$, zodat $\hat{a}_+ g(x) = [m\omega x - \hbar(d/dx)]g(x)/\sqrt{2m\hbar\omega}$. Uit partiële integratie volgt dat $\int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x)(d/dx)g(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x)(d/dx)f^*(x)$, zodat $\int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x)\hat{a}_+ g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x)[m\omega\hat{x} + \hbar(d/dx)]f^*(x)/\sqrt{2m\hbar\omega}$
$= \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x)(\hat{a}_- f(x))^*$.

b. Invullen van de gedaante $\hat{a}_- = [m\omega x - \hbar(d/dx)]/\sqrt{2m\hbar\omega}$ in de gegeven relatie $\hat{a}_-\Psi(x) = z\Psi(x)$ geeft de voorwaarde $m\omega x - 2\hbar b(x - \alpha) = z\sqrt{2m\hbar\omega}$ voor alle waarden van x. De coëfficiënt van x moet nul zijn, zodat $2\hbar b = m\omega$, ofwel $b = m\omega/(2\hbar)$. De overblijvende conditie is dan dat $2\hbar b\alpha = z\sqrt{2m\hbar\omega}$. Dat geeft de uitdrukking $\alpha = z\sqrt{2\hbar/(m\omega)}$.

c. De verwachtingswaarde voor de daaloperator in de eigentoestand Ψ is natuurlijk de eigenwaarde, zodat $\langle\hat{a}_-\rangle = z$. Uit het resultaat van a. volgt direct dat $\langle\hat{a}_+\rangle = \langle\hat{a}_-\rangle^* = z^*$. Uit de uitdrukkingen voor de ladderoperatoren volgt dat $\hat{p} = i(\hat{a}_+ - \hat{a}_-)\sqrt{m\hbar\omega/2}$ en $\hat{x} = (\hat{a}_+ + \hat{a}_-)\sqrt{\hbar/(2m\omega)}$. Dat geeft voor de verwachtingswaarden het resultaat $\langle p\rangle = i(\langle\hat{a}_+\rangle - \langle\hat{a}_-\rangle)\sqrt{m\hbar\omega/2} = \sqrt{2m\hbar\omega}\,\mathrm{Im}z$, en $\langle x\rangle = (\langle\hat{a}_+\rangle + \langle\hat{a}_-\rangle)\sqrt{\hbar/(2m\omega)} = \sqrt{2\hbar/(m\omega)}\,\mathrm{Re}z$.

d. De verwachtingswaarde van de Hamiltoniaan kennen we uit de verwachtingswaarde van $\langle\hat{a}_+\hat{a}_-\rangle$. Die schrijven we als $\langle\hat{a}_+\hat{a}_-\rangle = \int dx\Psi^*\hat{a}_+\hat{a}_-\Psi = \int dx(\hat{a}_-\Psi)^*\hat{a}_-\Psi$, waar we in de laatste stap opnieuw het resultaat van a. gebruiken. Hieruit volgt dat $\langle\hat{a}_+\hat{a}_-\rangle = z^*z = |z|^2$. De verwachtingswaarde van de Hamiltoniaan is dus $\langle H\rangle = \hbar\omega(|z|^2 + 1/2)$.

e. De golffunctie $\Psi(x)$ is een stationaire toestand in het speciale geval dat $z = 0$, omdat ze dan eigenfunctie is van $\hat{a}_+\hat{a}_-$ (met eigenwaarde nul). In dat geval is Ψ de grondtoestand. Andere stationaire toestanden hebben de gedaante van een Gaussische functie maal een polynoom. Voor $z \neq 0$ kan Ψ dus geen stationaire toestand zijn. Merk op dat Ψ wel een eigentoestand is van $\hat{a}_-$, maar niet van $\hat{a}_+$.