

Tentamen Quantummechanica 1

Examinator: Prof.dr. E.J.J. Groenen

25 januari 2016

Het cijfer achter iedere vraag geeft aan hoeveel punten te behalen zijn met het goed beantwoorden van de vraag (totaal 100 punten).

Maak gebruik van het blad met gegevens!

1. Het He^+ - ion.

De tijdsafhankelijke Schrödinger-vergelijking schrijven wij als

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (1)$$

- Hoe ziet de Hamilton-operator voor het eenwaardig positieve helium-ion ($Z=2$) eruit in termen van plaats- en impulsoperatoren? (5)
- Welke massa treedt op in de Hamilton-operator gegeven onder (a)? (4)

De eigenfuncties als oplossingen van vergelijking (1) zijn een product van een radiële en een hoekafhankelijke functie: $\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \varphi)$

- Geef de mogelijke waarden van de quantumgetallen n , l en m . (4)
 - Geef de expliciete uitdrukking voor Ψ_{211} van He^+ . (4)
 - De functie Ψ_{211} is een eigenfunctie van \hat{H} en van \hat{L}_z . Bij welke eigenwaarden? (4)
 - Bereken de meest waarschijnlijke waarde van r voor een electron in de toestand Ψ_{211} van He^+ in termen van de Bohr-straal a . (5)
 - De Balmer-reeks in het emissiespectrum van waterstof betreft de lijnen die overeenkomen met de overgang van een electron van een hogere energietoestand naar het niveau corresponderende met $n=2$. De eerste Balmerlijn ligt bij 656 nm. Bereken de golflengte die overeenkomt met deze lijn in het emissiespectrum van He^+ . (5)
2. De eigentoestanden van \hat{L}_z en \hat{L}^2 met quantumgetallen ℓ en m geven wij aan met $|\ell m\rangle$. Bekijk het geval $\ell = 1$.
- Wat zijn de mogelijke meetwaarden van L_z in de toestand $|1m\rangle$? (5)
 - Laat zien dat $\hat{L}_+|10\rangle$ een eigentoestand is van \hat{L}_z . (5)
 - Bepaal de matrixrepresentatie van \hat{L}_+ en \hat{L}_- in de basis van toestanden $|1m\rangle$. (5)
 - Bereken de verwachtingswaarde van L_x in de toestand $|10\rangle$. (5)

3. De harmonische oscillator

Beschouw een deeltje met massa m in een ééndimensionale harmonische-oscillator potentiaal (krachtconstante k). Voor de orthonormale oplossingen $\varphi_n(x)$ van de tijdsafhankelijke Schrödinger-vergelijking bij eigenwaarden $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ ($n=0,1,2,\dots$) geldt

$$\hat{a}_+ |\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\varphi_{n+1}\rangle$$

$$\hat{a}_- |\varphi_n\rangle = \sqrt{n} |\varphi_{n-1}\rangle$$

waarin $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en \hat{a}_+ en \hat{a}_- de ladderoperatoren representeren.

- Laat zien of $|\varphi_n\rangle$ een eigentoestand is van de product-operator $\hat{a}_+ \hat{a}_-$. (5)
- Leid de uitdrukking af voor de Hamilton-operator van de ééndimensionale harmonische oscillator in termen van \hat{a}_+ en \hat{a}_- . (4)
- Bepaal de verwachtingswaarde van de potentiële energie in de toestand $|\varphi_n\rangle$. (5)

Beschouw nu een driedimensionale isotrope harmonische oscillator.

- Geef de Hamilton-operator voor de driedimensionale isotrope harmonische oscillator. (4)
- Laat zien dat de productfuncties $\varphi_n(x)\varphi_l(y)\varphi_m(z)$ oplossingen zijn van de tijdsafhankelijke Schrödinger-vergelijking bij eigenwaarden $E_{nlm} = (n+l+m + \frac{3}{2})\hbar\omega$. (4)
- Wat zijn de mogelijke waarden van de quantumgetallen n, l en m ? (3)
- Bepaal de ontaardingsgraad van de toestand corresponderende met $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$. (4)

4. Spin $\frac{1}{2}$ deeltje in een magneetveld.

- Het spin $\frac{1}{2}$ deeltje wordt gekarakteriseerd door twee eigenspinoren. Geef die weer in de vorm $|s m_s\rangle$. (5)
- Van welke operatoren zijn deze toestanden eigenspinoren en bij welke eigenwaarden? (5)
- In een magneetveld $\vec{B} = (0,0,B)$ zijn dit stationaire toestanden. Bereken de corresponderende energieën voor het spin $\frac{1}{2}$ deeltje in een magneetveld. (5)
- Geef de uitdrukking voor de meest algemene oplossing van de tijdsafhankelijke Schrödinger-vergelijking voor het spin $\frac{1}{2}$ deeltje in een magneetveld. (5)