Tentamen Quantummechanica 1 21 december 2015

Examinator: Prof.dr. E.J.J. Groenen 14.00 – 17.00 uur

Het cijfer achter iedere vraag geeft aan hoeveel punten te behalen zijn met het goed beantwoorden van de vraag (totaal 100 punten).

Maak gebruik van het blad met gegevens!

1. Het waterstofatoom.

De tijdsonafhankelijke Schrödinger-vergelijking schrijven wij als

$$\hat{H}\psi(\vec{r})=E\psi(\vec{r}). \tag{1}$$

a. Hoe ziet de Hamilton-operator voor het waterstofatoom eruit in termen van plaats- en impulsoperatoren? (5)

De eigenfuncties als oplossingen van vergelijking (1) zijn een product van een radiële en een hoekafhankelijke functie: $\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)=R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$

b. Geef de waarden van de quantumgetallen n, l, en m die corresponderen met de gebonden toestanden (E<0). (5)
c. Van welk quantumgetal is de energie afhankelijk? (4)
d. Laat zien wat de ontaardingsgraad van ieder energieniveau is. (5)
e. Bepaal de verwachtingswaarde van x in de toestand beschreven met ψ_{210}. (5)
f. De meest waarschijnlijke waarde van r voor een electron in de grondtoestand van het waterstofatoom is de Bohr-straal a. Bereken de kans om het electron op die afstand a aan te treffen. (5)
g. De Balmer reeks in het emissiespectrum van waterstof betreft de lijnen die overeenkomen met de overgang van een electron van een hogere energietoestand naar het niveau corresponderende met n=2. De eerste Balmerlijn ligt bij 656 nm. Bereken de golflengte die overeenkomt met de limiet van de Balmer reeks. (5)

2. Beschouw een electron in de spintoestand $\chi=A\begin{pmatrix}3i\\4\end{pmatrix}$, weergegeven in de basis van eigenspinoren van $\hat{S}_z$.

a. Bepaal de normeringsconstante A. (5)
b. Wat is de kans dat voor S_z de waarde $\frac{1}{2}\hbar$ wordt gevonden? (4)
c. Bereken de verwachtingswaarde van S_y in de toestand χ. (5)
d. De verwachtingswaarden van S_x en S_z in de toestand χ zijn respectievelijk 0 en $-\frac{7}{50}\hbar$. Bereken de spreiding in S_x en in S_z in de toestand χ. (5)
e. Laat zien of S_x en S_z in de toestand χ voldoen aan de onzekerheidsrelatie voor deze observabelen. (5)
f. Zijn S_x en S_z in het algemeen gelijktijdig nauwkeurig meetbaar? Licht uw antwoord kort toe.(4)

3. De ééndimensionale harmonische oscillator.

Beschouw een deeltje met massa m in een harmonische-oscillator potentiaal (krachtconstante k). Voor de orthonormale oplossingen $\varphi_n(x)$ van de tijdsonafhankelijke Schrödinger-vergelijking bij eigenwaarden $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ $(n=0,1,2\ldots)$ geldt

$$\hat{a}_+|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle$$
$$\hat{a}_-|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle$$

waarin $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en $\hat{a}_+$ en $\hat{a}_-$ de ladderoperatoren representeren.

a. Laat zien of de toestanden $|\varphi_n\rangle$ eigentoestanden van $\hat{p}_x$ zijn. (5)
b. Druk de verandering met de tijd van de verwachtingswaarde van p_x in de toestand $|\varphi_n\rangle$ uit in termen van de verwachtingswaarde van x in die toestand. Becommentarieer het resultaat in relatie tot de verwachtingswaarde van $\frac{dV}{dx}$ (V is de potentiële energie van de harmonische oscillator). (5)

Stel nu dat het deeltje zich op t=0 bevindt in de toestand beschreven met

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\varphi_0(x)+\varphi_1(x)\}$$

c. Bepaal $\Psi(x,t)$. (4)
d. Bereken de verwachtingswaarde van p_x op het tijdstip t in de toestand beschreven met $\Psi(x,t)$. (5)

4. De Hermitese operator $\hat{A}$, corresponderende met de fysische observabele A, heeft twee genormeerde eigentoestanden ψ_1 en ψ_2 behorende bij verschillende eigenwaarden a_1 respectievelijk a_2. De Hermitese operator $\hat{B}$, corresponderende met de fysische observabele B, heeft twee genormeerde eigentoestanden φ_1 en φ_2 behorende bij verschillende eigenwaarden b_1 respectievelijk b_2.

In de basis $\{\varphi_1,\varphi_2\}$ zijn ψ_1 en ψ_2 te schrijven als

$$\psi_1 = \frac{1}{5}(4\varphi_1 + 3\varphi_2)$$
$$\psi_2 = \frac{1}{5}(3\varphi_1 - 4\varphi_2)$$

a. Waarom zijn ψ_1 en ψ_2 orthogonale eigentoestanden? (4)
b. Bij meting van observabele A wordt de waarde a_1 gevonden. In welke toestand is het systeem direct na deze meting? (5)
c. Als nu onmiddellijk (dat wil zeggen zonder dat de toestand van het systeem na de meting van A de kans heeft gehad te veranderen) B wordt gemeten, wat zijn dan de mogelijke meetresultaten en de daarbij behorende waarschijnlijkheden? (5)
d. Na de meting van B wordt onmiddellijk A weer gemeten. Wat is de kans dat wij weer de waarde a_1 vinden?(5)

Gegevens QM1 21 december 2015

$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$	$Y_2^{\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$
$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\theta$	$Y_3^0 = \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{1/2} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$
$Y_1^{\pm 1} = \mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta e^{\pm i\phi}$	$Y_3^{\pm 1} = \mp\left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2} \sin\theta\,(5\cos^2\theta - 1) e^{\pm i\phi}$
$Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3\cos^2\theta - 1)$	$Y_3^{\pm 2} = \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2\theta\cos\theta e^{\pm 2i\phi}$
$Y_2^{\pm 1} = \mp\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}$	$Y_3^{\pm 3} = \mp\left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2} \sin^3\theta e^{\pm 3i\phi}$

$$R_{10} = 2a^{-3/2}\exp(-r/a)$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)\exp(-r/2a)$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}} a^{-3/2}\frac{r}{a}\exp(-r/2a)$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}} a^{-3/2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r}{a} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\exp(-r/3a)$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}} a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)\exp(-r/3a)$$

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}} a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\exp(-r/3a)$$

Eendimensionale harmonische oscillator

$$\hat{a}_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(\mp i\hat{p}_x + m\omega\hat{x}\right)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$$

$$\frac{d\langle Q\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H}, \hat{Q}]\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\right\rangle$$

$$\sigma_A^2\,\sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right)^2$$

Rekenkundige reeks:

eerste term a, laatste term p, aantal termen m

$\rightarrow$ som $= \frac{m}{2}(a + p)$