Toets Quantummechanica 1 27 november 2017

Examinator: Prof.dr. E.J.J. Groenen 15:30 – 17:15 uur

1. a. Geef de (tijdsafhankelijke) Schrödinger-vergelijking.

   b. Leid voor het geval dat de potentiële energie geen functie is van de tijd, door scheiding van variabelen, de vorm af van het tijdsafhankelijk deel van de golffunctie.

   c. Het plaatsafhankelijk deel van de golffunctie voor het geval onder (b) voldoet aan de vergelijking $\hat{H}\psi(x)=E\psi(x)$. Bepaal de spreiding in de energie voor een deeltje in de toestand beschreven met $\psi(x)$.

2. Beschouw een harmonische oscillator met hoekfrequentie ω.

   In termen van de ladderoperatoren

$$\hat{a}_+\equiv\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(-i\hat{p}_x+m\omega\hat{x})$$

$$\hat{a}_-\equiv\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(i\hat{p}_x+m\omega\hat{x})$$

   kan de Hamilton-operator geschreven worden als

$$\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_-+\tfrac{1}{2}\right)$$

   en als $\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+-\tfrac{1}{2}\right)$

   a. Stel dat de functie $\psi_i(x)$ een oplossing is van de tijdsonafhankelijke Schrödinger-vergelijking bij energie E.
   Laat zien dat $\{\hat{a}_-\psi_i(x)\}$ ook een oplossing is van deze vergelijking. Bij welke energie?

De grondtoestand van deze harmonische oscillator wordt beschreven met

$$\psi_0(x)\sim\exp\left\{\frac{-m\omega x^2}{2\hbar}\right\}$$

b. Bepaal uitgaande van $\psi_0(x)$ de vorm van de golffunctie $\psi_1(x)$ voor de eerste aangeslagen toestand (dus exclusief normering).

De ladder-operatoren verbinden de genormeerde stationaire toestanden door de relaties

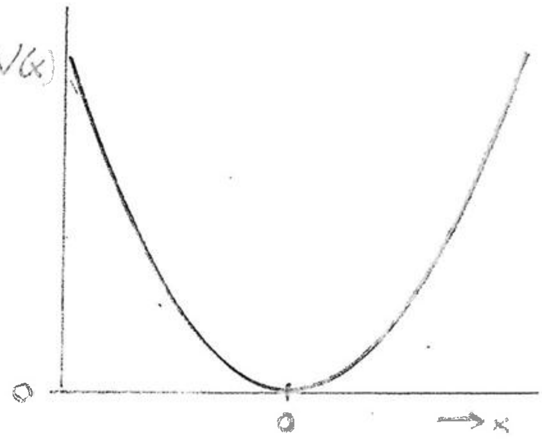
$$\hat{a}_+\psi_n(x)=\sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x)$$

$$\hat{a}_-\psi_n(x)=\sqrt{n}\,\psi_{n-1}(x)$$

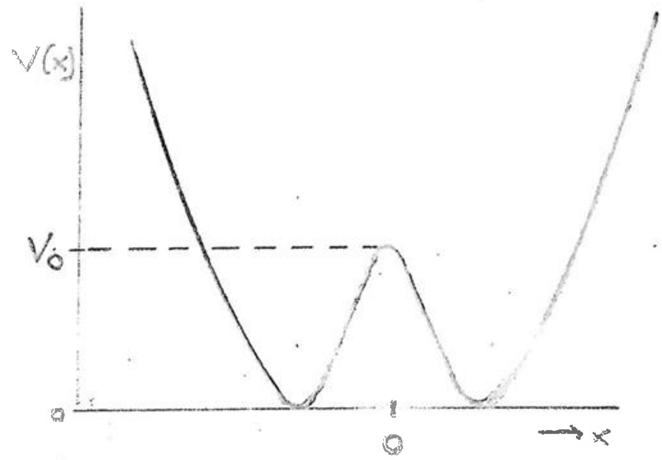
c. Bereken de commutator van de operatoren $\hat{a}_+$ en $\hat{a}_-$.
d. Bereken de verwachtingswaarde van de kinetische energie T als de oscillator zich bevindt in een van de stationaire toestanden $\psi_n(x)$.

3. In onderstaande tekeningen is de potentiële energie als functie van x weergegeven voor (I) een harmonische oscillator en (II) dezelfde oscillator met een barrière rond x = 0. In beide gevallen is V(x) een even functie van x.

I



II



a. Schets voor geval I de golffunctie $\psi_0(x)$ voor de grondtoestand en $\psi_1(x)$ voor de eerste aangeslagen toestand als functie van x.
b. Doe hetzelfde voor geval II onder de aanname dat de energie van beide toestanden kleiner is dan V_0.
c. Wat wordt in relatie tot potentiaal II verstaan onder "tunneling"?
d. Noem drie factoren die de waarschijnlijkheid van "tunneling" bepalen. Geef aan hoe die afhankelijkheid er uit ziet.