Tentamen Quantummechanica 1 9 februari 2018

Examinator: Prof.dr. E.J.J. Groenen 14:00 – 17:00 uur

Het cijfer achter iedere vraag geeft aan hoeveel punten te behalen zijn met het goed beantwoorden van de vraag (totaal 100 punten).

Maak gebruik van het blad met gegevens!

1. Het waterstofatoom.

De eigentoestanden van de Hamilton-operator van het waterstofatoom $|nlm\rangle$ corresponderen met functies die een product zijn van een afstandsafhankelijk deel $R(r)$ en een hoekafhankelijk deel $Y(\theta, \varphi)$.

a. Welke van de quantumgetallen n, l en m behoren bij $R(r)$ respectievelijk $Y(\theta, \varphi)$? (5)
b. Wat zijn de mogelijke waarden van de quantumgetallen n, l en m? (5)
c. Laat zien hoeveel eigentoestanden er zijn met $n=3$. (5)

Stel het waterstofatoom bevindt zich in de toestand

$$\psi(r,\vartheta,\varphi)=\frac{1}{162\sqrt{\pi}}\, a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp\left(\frac{-r}{3a}\right)\sin^2\vartheta\, e^{2i\varphi}$$

Ionisatie van waterstof in deze toestand kost 1.51 eV.

d. Bepaal de waarde van de quantumgetallen n en m voor deze toestand. (5)
e. Gezien uw antwoord onder (d), bereken de golflengte van de straling die uitgezonden wordt als het waterstofatoom uit deze toestand vervalt naar de grondtoestand. Gegeven: de eerste Balmerlijn correspondeert met 656,3 nm. (5)
f. Gezien uw antwoord onder (d), wat is de verwachtingswaarde van L_z in deze toestand. (5)

2. De één-dimensionale harmonische oscillator.

a. Gegeven: $\frac{d}{dt}<xp_x> =2<T> - <x\frac{dV}{dx}>$
Leid hieruit de verhouding af tussen de verwachtingswaarde van de kinetische energie en de verwachtingswaarde van de potentiële energie voor de harmonische oscillator in eigentoestand $|n>$. (8)
b. Bereken uitgaande van de uitdrukking voor de kinetische-energie operator de verwachtingswaarde van de kinetische energie voor de harmonische oscillator in de eigentoestand $|n>$. (8)

3. In de orthonormale basis van toestanden |1> , |2> , |3> ziet de matrixrepresentatie van de Hamilton-operator $\widehat{H}$ er uit als

$$\hbar\omega\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Van een andere operator $\widehat{A}$ wordt de matrix in dezelfde basis gegeven door

$$\alpha\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

met ω en α positief reële getallen.

a. Bepaal de eigenwaarden en genormeerde eigentoestanden van $\widehat{H}$ en $\widehat{A}$. (6)

Stel een quantumdeeltje is op het tijdstip t=0 in de toestand

$$|\varphi(0)\rangle = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

b. Bereken de verwachtingswaarde van de energie in deze toestand. (5)
c. Geef $|\varphi(t)\rangle$, de uitdrukking voor de toestand op het tijdstip t. (5)
d. Wat zijn de mogelijke meetwaarden van A op het tijdstip t? (5)
e. Bereken voor ieder van die waarden (gevonden onder (d)) de waarschijnlijkheid dat ze bij meting van A op het tijdstip t gevonden worden. (6)

4. Het deuteriumatoom (^2H) kent twee spinimpulsmomenten: $\overrightarrow{S_1}$ van het electron en $\overrightarrow{S_2}$ van de kern. De kern betreft een s=1 deeltje.

a. Geef de mogelijke spintoestanden van het electron in de vorm van $|s_1 m_{s_1}\rangle$. (5)
b. Van welke twee operatoren zijn de toestanden onder (a) eigentoestanden en bij welke eigenwaarden? (6)
c. Laat zien dat ook de vectorsom $\vec{S}=\overrightarrow{S_1}+\overrightarrow{S_2}$ in quantummechanische zin een impulsmoment is. (5)
d. Geef de mogelijke spintoestanden corresponderende met het totale spinimpulsmoment $\vec{S}$ van het deuteriumatoom in de vorm $|S\ M_s\rangle$. (5)
e. De toestand onder (d) die correspondeert met de hoogste waarde van S en met $M_s = -\frac{1}{2}$ is in termen van de spintoestanden van de afzonderlijke deeltjes te schrijven als

$$\sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2};1\ -1\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2};1\ 0\right\rangle$$

De spinoren zijn hierin geschreven als $|s_1 m_{s_1}; s_2 m_{s_2}\rangle$.
Leid hieruit de uitdrukking af in termen van de spintoestanden van de afzonderlijke deeltjes voor de spintoestand van het deuteriumatoom corresponderende met $M_s = -\frac{3}{2}$. (6)