

Tentamen Quantum Mechanica 2

19 juni 2015

Het tentamen bestaat uit 4 opgaven, waarmee in totaal 90 punten zijn te verdienen.

Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam, voorletters en studentnummer.

1. (a) (5 punten) Drie identieke, niet wisselwerkende *fermionen* met spin $\frac{1}{2}$ bevinden zich in een harmonische oscillator potentiaal (oscillatorfrequentie ω); de energie van een enkel fermion kan de volgende waarden hebben: $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Wat is de grondtoestandsenergie van het systeem van deze drie fermionen?

Oplossing: Volgens het Pauli-principe kunnen fermionen zich niet in dezelfde quantum-toestand bevinden. Deze fermionen hebben spin $\frac{1}{2}$ dus ze kunnen zich in twee verschillende spin toestanden bevinden ($m_s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$; spin up of spin down); In de laagste energietoestand van de harmonische-oscillatorpotentiaal $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ kunnen twee van deze fermionen zitten. De laagst mogelijke energie (=grondtoestandsenergie) voor drie fermionen is dan: $2E_0 + E_1 = \hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\omega = \frac{5}{2}\hbar\omega$.

- (b) (5 punten) Geef de formule voor de Fermi-Dirac verdeling, n_{FD} .

Oplossing:

$$n_{\text{FD}}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} + 1}$$

- (c) (5 punten) Stel dat twee eigentoestanden Ψ_a^0 en Ψ_b^0 van Hamiltoniaan $H^{(0)}$ dezelfde energie-eigenwaarde E_0 hebben (*ontaarding*). Beschrijf een situatie waarin ondanks de ontaarding toch niet-ontaarde storingsrekening gebruikt mag worden om de eerste orde energiecorrecties E^1 te berekenen in geval van een storingsterm H' in de Hamiltoniaan.

Oplossing: Mogelijke situaties worden beschreven in paragraaf 6.2.1 in Griffiths; één van beide noemen is voldoende:

- (i) Ψ_a^0 en Ψ_b^0 zijn ook eigentoestanden van H' . (Dit is equivalent met H' en $H^{(0)}$)

commuteren),

(ii) Ψ_a^0 en Ψ_b^0 zijn eigentoestanden van een *Hermitische* operator A , die zowel met H' en $H^{(0)}$ commuteert.

- (d) (5 punten) Een *baryon* bestaat uit drie quarks met elk spin $\frac{1}{2}$. Beredeneer welke waarden van het quantumgetal s voor de totale spin kunnen optreden. Welke waarde verwacht je dat het meest voorkomt en waarom?

Oplossing: De combinatie van 2 deeltjes met spin $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$ geeft een total spin $s = 1$ of 0 . De combinatie met een derde deeltje geeft voor spin $\frac{1}{2}$ en spin 1 de waarde $s = \frac{3}{2}$ of $\frac{1}{2}$. Voor spin $\frac{1}{2}$ en spin 0 volgen als mogelijke waarden voor s alleen $\frac{1}{2}$. Een *baryon* bestaande uit drie spin- $\frac{1}{2}$ quarks heeft dus totale spin $s = \frac{1}{2}$ of $\frac{3}{2}$, waarbij de waarde $s = \frac{1}{2}$ het meest voorkomt omdat er twee manieren zijn om deze waarde te krijgen.

2. Ideaal gas van identieke bosonen.

Beschouw een ideaal gas van identieke bosonen in drie (ruimtelijke) dimensies. We nemen aan dat de bosonen geen spin hebben ($s = 0$). De dispersierelatie is dan: $\varepsilon(\vec{k}) = \hbar^2 k^2 / 2m$, met $k = |\vec{k}|$ de lengte van de golfvector $\vec{k}$ en m de massa van de bosonen. Er gelden de volgende uitdrukkingen voor het totale deeltjesaantal N en de energie E :

$$N = \int_0^\infty d\varepsilon D(\varepsilon) n_{\text{BE}}(\varepsilon) \quad \text{en} \quad E = \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon D(\varepsilon) n_{\text{BE}}(\varepsilon)$$

- (a) (5 punten) Omschrijf zo exact mogelijk de betekenis van $D(\varepsilon)$ en $n_{\text{BE}}(\varepsilon)$.

Oplossing: (Hier wordt expliciet naar de betekenis gevraagd: een naam is dus niet voldoende)

$D(\varepsilon)$: de toestandsdichtheid, d.w.z. $D(\varepsilon)d\varepsilon$ is het aantal toestanden met energie tussen ε en $\varepsilon + d\varepsilon$ ($D(\varepsilon)$ is dus zelf geen aantal, maar een dichtheid (van toestanden))

$n_{\text{BE}}(\varepsilon)$: de Bose-Einstein verdeling, d.w.z. de gemiddelde bezettingsgraad van het één-deeltjes-niveaus met energie ε voor identieke bosonen. (n_{BE} is één kans(verdeling) en ook geen (meest-waarschijnlijk) aantal)

- (b) (5 punten) Laat zien dat geldt: $D(\varepsilon) = C\sqrt{\varepsilon}$, met C een constante.

N.B. de exacte uitdrukking voor C wordt niet gevraagd! Desgewenst kun je aannemen dat de bosonen zich in een (grote) kubus met ribbe L bevinden (volume $V = L^3$) en dat de golf functie van de individuele bosonen nul is op de randen van de kubus.

Oplossing: De energie hangt alleen af van de lengte van golfvector $\vec{k}$. Toestanden kunnen gerepresenteerd worden als roosterpunten in de $\vec{k}$ -ruimte. Combineer je dit met het feit dat een schil met dikte dk bij lengte k een volume heeft gelijk aan $4\pi k^2 dk = d(\frac{4}{3}\pi k^3)$, dan geldt voor het aantal toestanden met $|\vec{k}|$ tussen k en $k + dk$:

$$g(k)dk = D(\varepsilon)d\varepsilon \quad \text{met} \quad g(k) \sim k^2$$

Dan volgt:

$$D(\varepsilon) = g(k) \left(\frac{d\varepsilon}{dk} \right)^{-1} \sim k^2(k)^{-1} \sim k \sim \sqrt{\varepsilon}$$

- (c) (5 punten) Toon aan dat het volgende verband (*toestandsvergelijking*) tussen de macroscopische grootheden druk P , volume V en totale energie E geldt: $PV = \frac{2}{3}E$. Gebruik de volgende gegevens uit de statistische fysica: de *grand potential* $\Psi(\alpha, \beta, V)$ hangt als volgt samen met de druk P :

$$\Psi(\alpha, \beta, V) = \beta PV$$

en kan bij bekende één-deeltjes-energieën ε_k voor bosonen als volgt berekend worden:

$$\Psi(\alpha, \beta, V) = - \sum_k \ln [1 - e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_k)}]$$

waarbij k een label is voor de één-deeltjestoestanden en ε_k de energie van de betreffende één-deeltjestoestand. Gegeven is dat $\beta = 1/(k_B T)$.

Hints: 1) Schrijf de som over labels k (eventueel eerst als som over golfvectoren $\vec{k}$ en dan) als integraal over energie ε ; 2) Gebruik zonodig: $\ln(1 + \delta) \simeq \delta$ voor $\delta \ll 1$.

Oplossing: Als som over $\vec{k}$:

$$\Psi(\alpha, \beta, V) = - \sum_{\vec{k}} \ln (1 - e^{-(\alpha + \beta \varepsilon(\vec{k}))})$$

Als integraal over ε (hier verschijnt de toestandsdichtheid, zie (a)!):

$$\Psi(\alpha, \beta, V) = - \int d\varepsilon D(\varepsilon) \ln (1 - e^{-(\alpha + \beta \varepsilon)})$$

Uit $\Psi = \beta PV$ volgt dan:

$$PV = - \frac{1}{\beta} \int d\varepsilon D(\varepsilon) \ln (1 - e^{-(\alpha + \beta \varepsilon)})$$

Om het gevraagde verband af te leiden tussen PV en E , vergelijk je dit met de uitdrukking voor E :

$$E = \int d\varepsilon \varepsilon D(\varepsilon) n_{BE} = \int d\varepsilon \varepsilon D(\varepsilon) \frac{1}{e^{\alpha + \beta \varepsilon} - 1}$$

Aangezien we uit (b) weten dat $D(\varepsilon) = C\sqrt{\varepsilon}$ lijkt het goed idee om de uitdrukking voor PV partiël te integreren (differentiëren van de $\ln$ -functie zou dan o.a. n_{BE} moeten opleveren):

$$\begin{aligned} PV &= - \frac{C}{\beta} \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \ln (1 - e^{-(\alpha + \beta \varepsilon)}) \\ &= - \frac{C}{\beta} \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \ln (1 - e^{-(\alpha + \beta \varepsilon)}) \Big|_0^\infty \\ &\quad + \frac{C}{\beta} \frac{2}{3} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \frac{1}{-e^{-(\alpha + \beta \varepsilon)} + 1} e^{-(\alpha + \beta \varepsilon)} (-\beta) \end{aligned}$$

De stokterm is nul voor $\varepsilon \rightarrow \infty$ vanwege (gebruik hier(!) hint nummer 2):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \varepsilon^{3/2} \ln (1 - e^{-(\alpha + \beta \varepsilon)}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \varepsilon^{3/2} (-e^{-\alpha}) e^{-\beta \varepsilon} = 0$$

(want de e -macht wint het van van een enkele exponent). We hebben dan:

$$PV = \frac{2}{3} C \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \frac{1}{e^{(\alpha + \beta \varepsilon)} - 1} = \frac{2}{3} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon D(\varepsilon) n_{BE}(\varepsilon) = \frac{2}{3} E$$

- (d) (5 punten) Laat zien dat $PV < Nk_B T$.

Oplossing: Partiële integratie van de uitdrukking voor N (zie ook opgave 11 van het werkcollege):

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty d\varepsilon C \varepsilon^{1/2} \frac{1}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1} \\ &= \frac{2C}{3} \varepsilon^{3/2} \frac{1}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1} \Big|_0^\infty - \frac{2C}{3} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \frac{(-1)e^{\alpha+\beta\varepsilon}(\beta)}{(e^{(\alpha+\beta\varepsilon)} - 1)^2} \\ &= \frac{2\beta C}{3} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \frac{e^{\alpha+\beta\varepsilon}}{(e^{(\alpha+\beta\varepsilon)} - 1)^2} \end{aligned}$$

Schrijf de breuk met exponenten in de integraal als volgt:

$$\frac{e^{\alpha+\beta\varepsilon}}{(e^{(\alpha+\beta\varepsilon)} - 1)^2} = \frac{1}{e^{(\alpha+\beta\varepsilon)} - 1} + \frac{1}{(e^{(\alpha+\beta\varepsilon)} - 1)^2}$$

Dan hebben we (zie de uitdrukking voor PV op de laatste regel van (c)):

$$N = \beta PV + x$$

met

$$x = \frac{2\beta C}{3} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{3/2}}{(e^{(\alpha+\beta\varepsilon)} - 1)^2}$$

Omdat overduidelijk $x > 0$, geldt er: $\beta PV < N$, ofwel: $PV < Nk_B T$.

- (e) (5 punten) De ideale gaswet, $PV = Nk_B T$ geldt dus niet voor ideale Bose gassen. Geef een kwalitatieve, fysische verklaring voor de afwijking van de ideale gaswet.

Oplossing: De Bose-Einstein statistiek zorgt effectief voor een aantrekking tussen de bosonen. Bij dezelfde dichtheid ($\rho = \frac{N}{V}$) en temperatuur zal de druk op de wanden van een container dus kleiner zijn dan in een klassiek ideaal gas (ofwel: bij gelijke P, N, T zal een kleiner volume worden ingenomen). Dit verklaart waarom PV kleiner is dan $Nk_B T$ voor het ideale Bose gas.

3. Storingsrekening

We beschouwen een quantumstelsel met drie lineair onafhankelijke toestanden. De matrix-representatie van de Hamiltoniaan wordt gegeven door:

$$H = V_0 \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$$

waarin V_0 een constante is en ε een klein getal ($\varepsilon \ll 1$).

- (a) (5 punten) Wat zijn de eigenwaarden en eigenvectoren van de ongestoorde Hamiltoniaan ($\varepsilon = 0$)?

Oplossing: In dit geval is de matrix een diagonaal-matrix en kunnen we de eigenwaarden van de ongestoorde Hamiltoniaan aflezen op de diagonaal. De eigenwaarden zijn dus V_0 , V_0 en $2V_0$. De bijbehorende eigenvectoren zijn:

$$|\Psi_1^0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |\Psi_2^0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\Psi_3^0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (b) (5 punten) Schrijf de matrix op voor H' in de basis van eigenvectoren van de ongestoorde Hamiltoniaan.

Oplossing: We gaan uit van een Hamiltoniaan $H = H_0 + \varepsilon H_1$ met

$$H_1 = V_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) (5 punten) Indien we niet-onteerde storingsrekening zouden toepassen, wat zouden dan de correcties van orde ε zijn op de ongestoorde energie-niveaus van (a)?

Oplossing: In dit geval wordt de eerste-orde correctie op de energie-niveaus gegeven door de verwachtingswaarde van H' in de basis van eigenfuncties van $H^{(0)}$.

$$E_n^1 = \langle \Psi_n^0 | H' | \Psi_n^0 \rangle$$

De correcties van orde ε op de energie-niveaus zijn in dit geval allen gelijk nul. N.B. Je kunt eventueel ook uitrekenen

$$E_n^0 + E_n^1 = \langle \Psi_n^0 | H | \Psi_n^0 \rangle$$

- (d) (5 punten) Bereken de energie-eigenwaarde tot op tweede orde in de storing ε voor de niet-ontaarde eigenwaarde uit (a). Gebruik het resultaat van tweede-orde storingsrekening:

$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \Psi_m^0 | H' | \Psi_n^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}.$$

Hierin is H' het storingsdeel van de Hamiltoniaan H .

Oplossing: We geven de niet-ontaarde eigenwaarde de index $n = 3$ en de twee ontaarde eigenwaardes de index $m = 1, 2$. De noemer $E_n^0 - E_m^0 = V_0$ voor beide termen in de sommatie. Uitschrijven geeft

$$E_3^{(2)} = |\langle \Psi_1^0 | H' | \Psi_3^0 \rangle|^2 + |\langle \Psi_2^0 | H' | \Psi_3^0 \rangle|^2 = 0^2 + (V_0 \varepsilon)^2 = V_0 \varepsilon^2$$

Een belangrijk feit is dat de ongestoorde eigenwaarde en de correcties allen de factor V_0 bevatten en dus ook dezelfde eenheden hebben!

- (e) (5 punten) Bereken de energie-eigenwaarden tot op eerste orde in de storing ε voor de ontaarde eigenwaarde uit (a) door gebruik te maken van ontaarde storingsrekening.

Oplossing: Om dit te berekenen moeten we de eigenwaarden vinden van de matrix H' . Deze eigenwaarden λ kunnen we vinden door

$$\det(H' - \lambda I) = 0$$

waarbij I de 3×3 eenheidsmatrix is. Dit levert

$$2\varepsilon^2 V_0^2 \lambda - \lambda^3 = 0$$

met oplossingen $\lambda = 0$ en $\lambda = \pm \sqrt{2} \varepsilon V_0$, waarbij de laatste twee horen bij de ontaarde toestanden.

4. Elektrische-dipool overgang

Van belang voor het optreden van een *elektrische-dipool overgang* tussen quantummechanische toestanden van een atoom en dus voor de levensduur van een toestand is of het matrixelement tussen twee toestanden van de elektrische-dipool, $\vec{p} = -e \vec{r}$, ongelijk nul is (e : eenheidslading en $\vec{r} = (x, y, z)$: positie vector). Indien we electronspin en fijnstructuur buiten beschouwing laten, kunnen toestanden van het electron in het waterstofatoom worden weergegeven door $|n\ell m\rangle$, met bijbehorende golffuncties $\Psi_{n\ell m}$. In de tabel bij deze opgave worden enkele golffuncties, uitgedrukt in bolcoördinaten (r, θ, ϕ) , gegeven en verder enkele integralen die behulpzaam kunnen zijn bij het beantwoorden van de vragen.

- (a) (5 punten) Beargumenteer welke van de matrixelementen $\langle 100 | \vec{r} | 210 \rangle$ ($\langle 100 | x | 210 \rangle$, $\langle 100 | y | 210 \rangle$, $\langle 100 | z | 210 \rangle$) gelijk zijn aan nul.

Oplossing: Gevraagd wordt naar componenten van het matrixelement $\langle 100 | \vec{r} | 210 \rangle$. Aangezien de golffuncties gegeven zijn in bolcoördinaten, moet je x , y en z in bolcoördinaten schrijven.

$$z = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi$$

Verder merken we op dat golffunctie Ψ_{100} sferisch symmetrisch is, dus onafhankelijk van θ en ϕ . De golffunctie Ψ_{210} hangt niet af van ϕ . De enige ϕ afhankelijkheid in de x - en y -componenten is dus $\cos \phi$ of $\sin \phi$ en de integraal over ϕ tussen 0 en 2π levert nul op. Je kunt ook naar de θ afhankelijkheid kijken, maar vergeet dan niet de factor $\sin \theta$ van de Jacobiaan. Samen met de factor $\sin \theta$ van de x - of de y -component en de factor $\cos \theta$ van Ψ_{210} geeft dit

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = 0$$

De z -component is ongelijk aan nul, want de integraal over ϕ levert een factor 2π op en de θ -integraal levert

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}$$

De r afhankelijke integraal is duidelijk positief en ongelijk nul.

- (b) (5 punten) Bereken alledrie de componenten van $\langle 100 | \vec{r} | 210 \rangle$.

Oplossing: $\langle 100 | x | 210 \rangle = \langle 100 | y | 210 \rangle = 0$ (zie (a)) Berekening van de z -component levert:

$$\begin{aligned} \langle 100 | z | 210 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{32\pi}a^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{a} e^{-3r/2a} \cos^2 \theta \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{2\pi}{4\sqrt{2}\pi a^4} \frac{2}{3} \int_0^\infty r^4 e^{-3r/2a} dr = \frac{1}{a^4} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{2}{3} \left(\frac{2a}{3}\right)^5 4! \end{aligned}$$

Een goede controle op het eindresultaat is om te zien of je antwoord de juiste dimensie heeft, d.w.z. het resultaat moet de dimensie lengte hebben. Het is eenvoudig te zien dat

$$\langle 100 | z | 210 \rangle = a \frac{2^7 \sqrt{2}}{3^5} \simeq 0.745a$$

waarbij a de Bohr-straal.

De algemene formule voor de spontane emissie *rate* is:

$$A^{\text{spont.em.}} = \frac{\omega_0^3 |\vec{P}|^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}$$

waarin $\vec{P}$ het dipool-matrix element tussen twee toestanden is en $\hbar\omega_0$ de energie van de overgang.

- (c) (5 punten) Leidt een formule af voor A voor de overgang $|210\rangle \rightarrow |100\rangle$ uitgedrukt in de twee verhoudingen $E_1/m_e c^2$ en c/a (c : lichtsnelheid, m_e : massa van het electron, E_1 : laagste energie van het waterstofatoom, a : Bohr-straal). Maak gebruik van de volgende formules:

$$E_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_e a^2} \quad \text{en} \quad a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$$

Oplossing: Er geldt m.b.v. het resultaat van onderdeel (b), dat $|\vec{P}|^2 = e^2 a^2 \frac{2^{15}}{3^{10}}$ voor de overgang $|210\rangle \rightarrow |100\rangle$. De energie van de overgang is:

$$E_2 - E_1 = E_1/4 - E_1 = -\frac{3}{4}E_1 \quad \text{zodat} \quad \omega_0 = -\frac{3E_1}{4\hbar}$$

Gebruik nu de gegeven formule voor $A^{\text{spont.em.}}$:

$$A = \omega_0^3 |\vec{P}|^2 \frac{1}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} = -\frac{3^3}{2^6} \frac{E_1^3}{\hbar^3} \frac{2^{15}}{3^{10}} e^2 a^2 \frac{1}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} = -\frac{2^9}{3^8} \frac{E_1^3 e^2 a^2}{\pi\epsilon_0 \hbar^4 c^3}$$

Dit kan in de gevraagde vorm geschreven worden door gebruik te maken van de twee gegeven formules voor E_1 en a :

$$\frac{E_1^3 e^2 a^2}{\pi\epsilon_0 \hbar^4 c^3} = E_1^2 \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e a^2} \right) \frac{e^2 a^2}{m_e e^2 a/4} \frac{1}{\hbar^2 c^3} = -2 \left(\frac{E_1}{m_e c^2} \right)^2 \frac{c}{a}$$

zodat

$$A = \frac{2^{10}}{3^8} \left(\frac{E_1}{m_e c^2} \right)^2 \frac{c}{a}$$

- (d) (5 punten) Bereken de levensduur (in seconden) van de toestand $|210\rangle$. Gebruik dat de rustmassa van het electron 0.511 MeV is en $E_1 = -13.6$ eV, $c = 3 \times 10^8$ m/s, en $a = 0.529 \times 10^{-10}$ m.

Oplossing: De levensduur τ is:

$$\tau = \frac{1}{A} = \frac{3^8}{2^{10}} \left(\frac{0.511 \times 10^6}{-13.6} \right)^2 \left(\frac{0.529 \times 10^{-10}}{3 \times 10^8} \right) \text{s}$$

Dit geeft de waarde $\tau = 1.6 \times 10^{-9} \text{ s} = 1.6 \text{ ns}$.

x , y en z in bolcoördinaten: $z = r \cos \theta$, $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$

$$\begin{aligned}\Psi_{100} &= \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \\ \Psi_{200} &= \frac{1}{\sqrt{8\pi a^3}} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-r/2a} \\ \Psi_{210} &= \frac{1}{\sqrt{32\pi a^3}} \frac{r}{a} e^{-r/2a} \cos(\theta) \\ \Psi_{21\pm 1} &= \frac{\mp}{8\sqrt{\pi a^3}} \frac{r}{a} e^{-r/2a} e^{\pm i\phi} \sin(\theta) \\ \Psi_{300} &= \frac{1}{\sqrt{27\pi a^3}} \left(1 - \frac{2r}{3a} + \frac{2r^2}{27a^2}\right) e^{-r/3a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^n(\theta) \cos(\theta) d\theta &= 0 \quad n \text{ geheel, niet negatief } (n \in \mathbb{N}) \\ \int_0^\pi \cos^n(\theta) \sin(\theta) d\theta &= \frac{1}{n+1} (1 - (-1)^{n+1}) \\ \int_0^{2\pi} e^{in\phi} d\phi &= 0 \quad (n \neq 0) \\ \int_0^\infty x^n e^{-x/b} dx &= n! b^{n+1}\end{aligned}$$