Tentamen Quantum Mechanica 2

19 juni 2015

Het tentamen bestaat uit 4 opgaven, waarmee in totaal 90 punten zijn te verdienen.

Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam, voorletters en studentnummer.

1. (a) (5 punten) Drie identieke, niet wisselwerkende *fermionen* met spin $\frac{1}{2}$ bevinden zich in een harmonische oscillator potentiaal (oscillatorfrequentie ω); de energie van een enkel fermion kan de volgende waarden hebben: $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Wat is de grondtoestandsenergie van het systeem van deze drie fermionen?

   (b) (5 punten) Geef de formule voor de Fermi-Dirac verdeling, n_{FD}.

   (c) (5 punten) Stel dat twee eigentoestanden Ψ_a^0 en Ψ_b^0 van Hamiltoniaan $H^{(0)}$ dezelfde energie-eigenwaarde E_0 hebben (*ontaarding*). Beschrijf een situatie waarin ondanks de ontaarding toch <u>niet</u>-ontaarde storingsrekening gebruikt mag worden om de eerste orde energiecorrecties E^1 te berekenen in geval van een storingsterm H' in de Hamiltoniaan.

   (d) (5 punten) Een *baryon* bestaat uit <u>drie</u> quarks met elk spin $\frac{1}{2}$. Beredeneer welke waarden van het quantumgetal s voor de totale spin kunnen optreden. Welke waarde verwacht je dat het meest voorkomt en waarom?

2. **Ideaal gas van identieke bosonen.**

Beschouw een ideaal gas van identieke bosonen in drie (ruimtelijke) dimensies. We nemen aan dat de bosonen geen spin hebben ($s = 0$). De dispersierelatie is dan: $\varepsilon(\overrightarrow{k}) = \hbar^2 k^2/2m$, met $k = |\overrightarrow{k}|$ de lengte van de golfvector $\overrightarrow{k}$ en m de massa van de bosonen. Er gelden de volgende uitdrukkingen voor het totale deeltjesaantal N en de energie E:

$$N = \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon D(\varepsilon) n_{\mathrm{BE}}(\varepsilon) \quad \text{en} \quad E = \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\ \varepsilon D(\varepsilon) n_{\mathrm{BE}}(\varepsilon)$$

(a) (5 punten) Omschrijf zo exact mogelijk de betekenis van $D(\varepsilon)$ en $n_{\mathrm{BE}}(\varepsilon)$.

(b) (5 punten) Laat zien dat geldt: $D(\varepsilon) = C\sqrt{\varepsilon}$, met C een constante.
N.B. de exacte uitdrukking voor C wordt niet gevraagd! Desgewenst kun je aannemen dat de bosonen zich in een (grote) kubus met ribbe L bevinden (volume $V = L^3$) en dat de golffunctie van de individuele bosonen nul is op de randen van de kubus.

(c) (5 punten) Toon aan dat het volgende verband (*toestandsvergelijking*) tussen de macroscopische grootheden druk P, volume V en totale energie E geldt: $PV = \frac{2}{3}E$. Gebruik de volgende gegevens uit de statistische fysica: de *grand potential* $\Psi(\alpha, \beta, V)$ hangt als volgt samen met de druk P:

$$\Psi(\alpha, \beta, V) = \beta PV$$

en kan bij bekende één-deeltjes-energieën ε_k voor bosonen als volgt berekend worden:

$$\Psi(\alpha, \beta, V) = -\sum_k \ln\left[1 - \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta\varepsilon_k)}\right]$$

waarbij k een label is voor de één-deeltjestoestanden en ε_k de energie van de betreffende één-deeltjestoestand. Gegeven is dat $\beta = 1/(k_B T)$.
Hints: 1) Schrijf de som over labels k (eventueel eerst als som over golfvectoren $\overrightarrow{k}$ en dan) als integraal over energie ε; 2) Gebruik zonodig: $\ln(1+\delta) \simeq \delta$ *voor* $\delta \ll 1$.

(d) (5 punten) Laat zien dat $PV < Nk_BT$.

(e) (5 punten) De ideale gaswet, $PV = Nk_BT$ geldt dus niet voor ideale Bose gassen. Geef een kwalitatieve, fysische verklaring voor de afwijking van de ideale gaswet.

3. **Storingsrekening**

We beschouwen een quantumsysteem met drie lineair onafhankelijke toestanden. De matrix-representatie van de Hamiltoniaan wordt gegeven door:

$$H = V_0 \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$$

waarin V_0 een constante is en ε een klein getal ($\varepsilon \ll 1$).

(a) (5 punten) Wat zijn de eigenwaarden en eigenvectoren van de ongestoorde Hamiltoniaan ($\varepsilon = 0$)?

(b) (5 punten) Schrijf de matrix op voor H' in de basis van eigenvectoren van de ongestoorde Hamiltoniaan.

(c) (5 punten) Indien we niet-ontaarde storingsrekening zouden toepassen, wat zouden dan de correcties van orde ε zijn op de ongestoorde energie-niveaus van (a)?

(d) (5 punten) Bereken de energie-eigenwaarde tot op tweede orde in de storing ε voor de niet-ontaarde eigenwaarde uit (a). Gebruik het resultaat van tweede-orde storingsrekening:

$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \Psi_m^0 | H' | \Psi_n^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0} \ .$$

Hierin is H' het storingsdeel van de Hamiltoniaan H.

(e) (5 punten) Bereken de energie-eigenwaarden tot op eerste orde in de storing ε voor de ontaarde eigenwaarde uit (a) door gebruik te maken van ontaarde storingsrekening.

4. **Elektrische-dipool overgang**

Van belang voor het optreden van een *elektrische-dipool overgang* tussen quantummechanische toestanden van een atoom en dus voor de levensduur van een toestand is of het matrixelement tussen twee toestanden van de elektrische-dipool, $\overrightarrow{p} = -e\overrightarrow{r}$, ongelijk nul is ($e$: eenheidslading en $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$: positie vector). Indien we electronspin en fijnstructuur buiten beschouwing laten, kunnen toestanden van het electron in het waterstofatoom worden weergegeven door $|n\ell m\rangle$, met bijbehorende golffuncties $\Psi_{n\ell m}$. In de tabel bij deze opgave worden enkele golffuncties, uitgedrukt in bolcoördinaten (r, θ, ϕ), gegeven en verder enkele integralen die behulpzaam kunnen zijn bij het beantwoorden van de vragen.

(a) (5 punten) Beargumenteer welke van de matrixelementen $\langle 100|\overrightarrow{r}|210\rangle$ ($\langle 100|x|210\rangle$, $\langle 100|y|210\rangle$, $\langle 100|z|210\rangle$) gelijk zijn aan nul.

(b) (5 punten) Bereken alledrie de componenten van $\langle 100|\overrightarrow{r}|210\rangle$.

De algemene formule voor de spontane emissie *rate* is:

$$A^{\text{spont.em.}} = \frac{\omega_0^3 |\overrightarrow{P}|^2}{3\pi\varepsilon_0 \hbar c^3}$$

waarin $\overrightarrow{P}$ het dipool-matrix element tussen twee toestanden is en $\hbar\omega_0$ de energie van de overgang.

(c) (5 punten) Leidt een formule af voor A voor de overgang $|210\rangle \to |100\rangle$ uitgedrukt in de twee verhoudingen $E_1/m_e c^2$ en c/a (c: lichtsnelheid, m_e: massa van het electron, E_1: laagste energie van het waterstofatoom, a: Bohr-straal). Maak gebruik van de volgende formules:

$$E_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_e a^2} \quad \text{en} \quad a = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$$

(d) (5 punten) Bereken de levensduur (in seconden) van de toestand $|210\rangle$. Gebruik dat de rustmassa van het electron 0.511 MeV is en $E_1 =$ -13.6 eV, $c = 3 \times 10^8$ m/s, en $a = 0.529 \times 10^{-10}$ m.

$x,\ y$ en z in bolcoördinaten: $z = r\cos\theta, \quad x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r sin\theta\sin\phi$

$$\begin{aligned}
\Psi_{100} &= \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \mathrm{e}^{-r/a} \\
\Psi_{200} &= \frac{1}{\sqrt{8\pi a^3}} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) \mathrm{e}^{-r/2a} \\
\Psi_{210} &= \frac{1}{\sqrt{32\pi a^3}} \frac{r}{a} \mathrm{e}^{-r/2a} \cos(\theta) \\
\Psi_{21\pm1} &= \frac{\mp}{8\sqrt{\pi a^3}} \frac{r}{a} \mathrm{e}^{-r2/a} \mathrm{e}^{\pm i\phi} \sin(\theta) \\
\Psi_{300} &= \frac{1}{\sqrt{27\pi a^3}} \left(1 - \frac{2r}{3a} + \frac{2r^2}{27a^2}\right) \mathrm{e}^{-r/3a}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin^n(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta &= 0 \quad n \text{ geheel, niet negatief } (n \in \mathbb{N}) \\
\int_0^{\pi} \cos^n(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{n+1}(1-(-1)^{n+1}) \\
\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{in\phi}\mathrm{d}\phi &= 0 \quad (n \neq 0) \\
\int_0^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-x/b}\mathrm{d}x &= n!\,b^{n+1}
\end{aligned}
$$