# Tentamen Quantum Mechanica 2

30 mei 2016

**Het tentamen bestaat uit 4 opgaven, waarmee in totaal 60 punten zijn te verdienen.**

**Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam, voorletters en studentnummer.**

1. (a) (4 punten) In een oneindig-diepe, rechthoekige potentiaalput hebben de eigentoestanden één deeltje-energieën $E_n = Cn^2$, $n = 1, 2, 3 \ldots$ met $C$ een constante energie. Beschouw drie identieke, niet-wisselwerkende fermionen met spin $\frac{1}{2}$ in bovenbeschreven potentiaalput. Wat is de grondtoestandsenergie van het systeem van deze drie fermionen?

   (b) (4 punten) Een deeltje met spin 1 (quantumgetal $s = 1$) bevindt zich in een toestand met quantumgetal $\ell = 2$ voor wat betreft het baanimpulsmoment. Wat zijn de mogelijke waarden voor het quantumgetal $j$ dat hoort bij het totale impulsmoment $\overrightarrow{J}(= \overrightarrow{L} + \overrightarrow{S})$?.

   (c) (4 punten) In de theorie van de fijnstructuur van het waterstofatoom is de storingsterm in de Hamiltoniaan die de *spin-baan koppeling* in rekening brengt van de vorm:
$$H_{so} = B\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}$$
   waarin $\overrightarrow{X}$ en $\overrightarrow{Y}$ twee fysische vectorgrootheden zijn en $B$ een constante voorfactor. Welke grootheden stellen $\overrightarrow{X}$ en $\overrightarrow{Y}$ hierin voor en wat is de fysische dimensie van de voorfactor $B$?

   (d) (4 punten) Geef en benoem de quantumgetallen die de eigentoestanden van het waterstofatoom karakteriseren in het geval het atoom in een sterk extern magneetveld wordt geplaatst (sterk-veld Zeeman effect).

   (e) (4 punten) Waarom mag je het elektrisch veld in de interactie tussen zichtbaar licht en atomen effectief als plaatsonafhankelijk veronderstellen (de “elektrische dipoolbenadering” )?

2. **2-D ideaal Bose gas**

   Beschouw een ideaal gas van identieke bosonen in **twee** (ruimtelijke) dimensies. We nemen aan dat de bosonen geen spin hebben ($s = 0$) en allemaal dezelfde massa $m$ hebben. De dispersierelatie is dan: $\varepsilon(\overrightarrow{k}) = \hbar^2 k^2/2m$, met $k = |\overrightarrow{k}|$ de lengte van de golfvector $\overrightarrow{k}$ en $m$ de massa van de bosonen. Neem aan dat de bosonen zich in een (groot) vierkant met zijde $L$ bevinden (oppervlak $O = L^2$) en de componenten van de golfvector $\overrightarrow{k}$ slechts gehele veelvouden van $2\pi/L$ kunnen zijn. Er gelden de volgende uitdrukkingen voor het totale deeltjesaantal $N$ en de energie $E$:

   $$N = \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon D(\varepsilon) n_{\mathrm{BE}}(\varepsilon) \quad \text{en} \quad E = \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \; \varepsilon D(\varepsilon) n_{\mathrm{BE}}(\varepsilon)$$

   (a) (4 punten) Omschrijf zo exact mogelijk de betekenis van $D(\varepsilon)$ en $n_{\mathrm{BE}}(\varepsilon)$.

   (b) (4 punten) Laat zien dat $D(\varepsilon)$ onafhankelijk is van $\varepsilon$ in deze situatie.

   (c) (6 punten) Het verschijnsel **Bose-Einstein condensatie** treedt op wanneer de chemische potentiaal $\mu(T)$ gelijk wordt aan nul bij een eindige temperatuur ($T > 0$). Het gevolg hiervan is dat, beneden een kritische temperatuur $T_c$, alle deeltjes in de quantum mechanische grondtoestand komen. Beargumenteer aan de hand van de resultaten en formules hierboven of er in een twee-dimensionaal ideaal Bose gas al dan niet Bose-Einstein condensatie kan optreden.

3. **Lineaire potentiaalput**

   Beschouw een één-dimensionale lineaire potentiaalput:

   $$V(x) = A|x|$$

   De Hamiltoniaan voor een deeltje met massa $m$ in deze potentiaalput is dan:

   $$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$$

   (a) (6 punten) Bereken op basis van het variatieprincipe de laagstmogelijke energie $E^D_{min}$, in de potentiaalput voor een driehoekige probeerfunctie:

   $$\Psi_D(x) = \begin{cases} C(x+d) & \text{voor} \quad -d \le x \le 0 \\ C(-x+d) & \text{voor} \quad 0 \le x \le d \\ 0 & \text{voor} \quad |x| > d \end{cases}$$

   *Hint: Bedenk dat de afgeleide van een stapfunctie een Dirac delta-functie is met sterkte gelijk aan de grootte van de stap.*

   (b) (4 punten) Een Gaussische probeerfunctie,

   $$\Psi_G(x) = B\mathrm{e}^{-bx^2}$$

levert in deze potentiaal een laagstmogelijke energie op gelijk aan (Er wordt **niet** gevraagd dit na te rekenen!)

$$E^G_{min} = \frac{3}{2}\left(\frac{A^2\hbar^2}{2\pi m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Vergelijk deze energie met het antwoord bij vraag a). Wat kun je op basis van het quantummechanische variatieprincipe zeggen over de exacte grondtoestandsenergie $E_{GS}$, in de lineaire potentiaalput?

4. **Stark effect**

Van een atoom dat in een uniform elektrisch veld wordt geplaatst verschuiven de energieniveaus; dit heet het Stark effect. Om deze verschuivingen te berekenen voegen we een storingsterm toe aan de Hamiltoniaan:

$$H_S = eE_{ext}x = eE_{ext}r\sin\theta\cos\phi$$

(we hebben het externe elektrisch veld $E_{ext}$ in de $x$-richting gekozen). Beschouw het waterstofatoom en neem $H_S$ als storing op de Bohr-Hamiltoniaan. We laten de elektronspin en fijnstructuur buiten beschouwing; dan kunnen toestanden van het elektron in het waterstofatoom weergegeven worden als $|nlm\rangle$, met bijbehorende golffuncties $\Psi_{nlm}$. In de tabel bij deze opgave worden enkele golffuncties gegeven, uitgedrukt in bolcoördinaten $(r, \theta, \phi)$, en verder enkele integralen die behulpzaam kunnen zijn bij het beantwoorden van de vragen.

(a) (4 punten) De eigentoestanden met hoofdquantumgetal $n = 2$; $\Psi_{200}$, $\Psi_{211}$, $\Psi_{210}$, $\Psi_{21-1}$ hebben zonder elektrisch veld allemaal dezelfde energie (zijn ontaard). Noem de matrixelementen van $H_S$ in de basis van bovengenoemde toestanden $W_{ij}$. Nummer de toestanden 1 t/m 4: $1 \equiv \Psi_{200}$, $2 \equiv \Psi_{211}$, $3 \equiv \Psi_{210}$, $4 \equiv \Psi_{21-1}$. $W$ is dus een $4 \times 4$ matrix. Van de 16 matrixelementen zijn er 4 niet nul. Geef de volledige argumentatie waarom de andere 12 matrixelementen gelijk aan nul zijn.

(b) (4 punten) Bereken $W_{12}$.

Van belang voor het optreden van een *elektrische-dipoolovergang* tussen quantummechanische toestanden van een atoom, en dus voor de levensduur van een toestand, is de grootte van het (niet-diagonale) matrixelement van de elektrische dipool:

$$\overrightarrow{P} = -e\langle n'l'm'|\overrightarrow{r}|nlm\rangle$$

waarbij $e$: eenheidslading, en $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$: positie-vector voorstellen.

(c) (4 punten) Beschrijf kort een overeenkomst en een verschil tussen de berekeningen die je voor het Stark effect en die je voor het bepalen van de levensduur van een atomaire toestand moet doen. Neem desgewenst de $n = 2$ toestanden van het waterstofatoom als voorbeeld.

(d) (4 punten) Voor de levensduur van toestand $|211\rangle$ is het nodig $\langle 100|\vec{r}|211\rangle$ te berekenen. Beschrijf een efficiënt plan van aanpak voor deze berekening, d.w.z. een plan waarin zo weinig mogelijk integralen berekend hoeven te worden. Het uitvoeren van de berekening wordt niet gevraagd.

$x$, $y$ en $z$ in bolcoördinaten: $z = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$

$$\begin{aligned}
\Psi_{100} &= \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \mathrm{e}^{-r/a} \qquad a : \text{Bohrstraal} \\
\Psi_{200} &= \frac{1}{\sqrt{8\pi a^3}} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) \mathrm{e}^{-r/2a} \\
\Psi_{210} &= \frac{1}{\sqrt{32\pi a^3}} \frac{r}{a} \mathrm{e}^{-r/2a} \cos(\theta) \\
\Psi_{21\pm1} &= \frac{\mp}{8\sqrt{\pi a^3}} \frac{r}{a} \mathrm{e}^{-r/2a} \mathrm{e}^{\pm i\phi} \sin(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^n(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\theta &= 0 \quad n \text{ geheel, niet negatief } (n \in \mathbb{N}) \\
\int_0^\pi \sin^3(\theta)\mathrm{d}\theta &= \frac{4}{3} \\
\int_0^\pi \cos^n(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{n+1}(1 - (-1)^{n+1}) \\
\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{in\phi}\mathrm{d}\phi &= 0 \quad (n \neq 0) \\
\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi)\mathrm{d}\phi &= \pi \\
\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x/b}\mathrm{d}x &= n! b^{n+1}
\end{aligned}$$