

Tentamen Quantummechanica 2

29 juni 2006

Opgave 1

Een waterstofatoom bevindt zich in een elektrisch veld met sterkte E in de z -richting. Dit geeft de storings-Hamiltoniaan $H' = eEz$ met $z = r \cos \theta$ in bolcoördinaten. De eigenfuncties ψ_{nlm} zijn gegeven door vergelijking 4.74, met de bolfuncties Y_l^m gegeven in Table 4.3 [4.2], en de radiële golf functies R_{nl} in Table 4.7 [4.6].

- Toon aan dat de eerste-orde correctie op de energie van de grondtoestand ψ_{100} verdwijnt.
- Geef uitdrukkingen voor de matrix-elementen $\langle \psi_{2lm} | H' | \psi_{100} \rangle$ van de storings-Hamiltoniaan tussen de grondtoestand en de vier ontaarde subtoestanden van de eerste aangeslagen toestand (met $n = 2$).
- Geef een uitdrukking voor de tweede-orde correctie op de energie van de grondtoestand, als alleen de koppeling met de vier toestanden $|\psi_{2lm}\rangle$ met $n = 2$ in rekening wordt gebracht.
- Is deze correctie positief of negatief? En wat kunt u zeggen over het teken van de weggelaten bijdragen tot deze tweede-orde correctie?

Opgave 2.

We beschouwen een heliumatoom in een toestand waarbij het baanimpulsmoment en de totale spin van de elektronen beide quantumgetal 1 hebben. Omdat dus $l = 1$ en $s = 1$, heeft deze toestand negen subtoestanden. Het atoom bevindt zich in een sterk magneetveld langs de z -as, met sterkte B . De subtoestanden worden beschreven door de Hamiltoniaan $H^0 + H'$, met H^0 de Zeeman-Hamiltoniaan, en H' de Hamiltoniaan voor de spin-baankoppeling, gedefinieerd als

$$H^0 = \frac{eB}{2m}(L_z + 2S_z), \quad H' = \gamma \vec{L} \cdot \vec{S} / \hbar,$$

waarin de frequentie γ de sterkte van de spin-baankoppeling bepaalt. Gegeven is dat $eB/(2m) \gg \gamma$, zodat we de spin-baankoppeling kunnen opvatten als een storing op de Zeeman-Hamiltoniaan.

- Geef de eigentoestanden en de eigenwaarden van H^0 . Hoeveel verschillende eigenwaarden zijn er?
- Laat zien welke van deze eigenwaarden ontaard zijn, en bepaal de ontaardingsgraad.
- Bepaal met eerste-orde-storingsrekening de correctie op de energie-eigenwaarden als gevolg van de spin-baankoppeling.
- Geef de energiesplitsing aan voor de ontaarde toestanden als gevolg van deze storing.
- Hoeveel energie-eigenwaarden (van H') zijn er als het magneetveld is uitgezet (zodat $H^0 = 0$)?

Opgave 3.

We beschouwen de eendimensionale harmonische oscillator met een tijdafhankelijk evenwichtspunt $x_0(t)$, zodat de Hamiltoniaan gegeven is door $H(t) = T + V(t)$, met T de kinetische energie, en potentiële energie

$$V(x, t) = \frac{1}{2}m\omega^2 (x - x_0(t))^2 .$$

x_0 beschrijft een tijdafhankelijk pad waarbij $x_0(0) = 0$ en $x_0(t_f) = 0$. De beweging is voldoende langzaam zodat de adiabatische benadering geldt.

- Karakteriseer de tijdafhankelijke eigenfuncties $\phi_n(x, t)$ en eigenwaarden $E_n(t)$ van deze Hamiltoniaan in termen van de eigenfuncties $\psi_n(x)$ en eigenwaarden E_n bij $V(x) = m\omega^2 x^2/2$.
- Wat kunt u zeggen over de waarde van de termen $\langle \phi_n | \frac{d}{dt} \phi_n \rangle$?
- Geef een uitdrukking voor de toestand $|\Psi(t_f)\rangle$ van de oscillator als de begintoestand $|\Psi(0)\rangle = |\psi_n\rangle$ de grondtoestand is.

Nu nemen we aan dat het minimum van de potentiële energie met de tijd varieert, zodat

$$V(x, t) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + V_0(t) .$$

met V_0 een potentiaal die wel van t maar niet van x afhangt, en $V_0(0) = V_0(t_f) = 0$.

- Beantwoord ook voor dit geval de vragen a, b en c.