TENTAMEN QUANTUMMECHANICA 2 8 juni 2012

(College Dr. P.J.H. Denteneer, voorjaar 2012) 14 - 17 uur

Schrijf op elk vel dat je inlevert NAAM, VOORLETTERS en STUDENTNUMMER.
Het tentamen bestaat uit 3 opgaven!
Begin de uitwerking van elke opgave op een nieuwe pagina!
Het aantal punten dat je met de verschillende opgaven kunt verdienen is als volgt: 1) 30 punten, 2) 30 punten, 3) 36 punten. Je krijgt 4 punten cadeau. Elk onderdeel in een opgave kan evenveel punten opleveren, d.w.z. 5, 6 en 6 punten per onderdeel voor Opgaven 1), 2) en 3), respectievelijk. Bedenk dat gedeeltelijk correcte antwoorden of antwoorden die blijk geven van enig begrip van de vraag of opdracht ook punten op kunnen leveren.

1) Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen of opdrachten (er wordt in deze opgave niet om uitgebreide berekeningen of afleidingen gevraagd):

   (a) Twee identieke, niet-wisselwerkende *fermionen* bevinden zich in een harmonische oscillator potentiaal (oscillatorfrequentie ω); de energie van een enkel fermion kan de volgende waarden hebben: $E_n = (n + \frac{1}{2})\,\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Wat is de grondtoestandsenergie van het systeem van deze twee fermionen, indien verder gegeven is dat de fermionen dezelfde spintoestand hebben?

   (b) Geef de formule voor de Bose-Einstein verdeling, $n_{\mathrm{BE}}(\varepsilon)$.

   (c) De formule voor de tweede-orde-storingsrekening correctie op de energie van niveau n is:
$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0} \, .$$
   Welke algemene conclusie kun je uit deze formule trekken voor de tweede-orde correctie op de grondtoestandsenergie?

   (d) In de theorie van de fijnstructuur van het waterstofatoom is de storingsterm in de Hamiltoniaan die de *spin-baan koppeling* in rekening brengt van de vorm: $H'_{\mathrm{so}} = B\,\vec{X} \cdot \vec{Y}$, waarin $\vec{X}$ en $\vec{Y}$ twee fysische vectorgrootheden zijn en B een constante voorfactor. Welke grootheden stellen de twee vectoren $\vec{X}$ en $\vec{Y}$ hierin voor en wat is de fysische dimensie van de voorfactor B?

   (e) Waarom mag je het elektrisch veld in de interactie tussen zichtbaar licht en atomen effectief als *plaatsonafhankelijk* veronderstellen (de "elektrische dipoolbenadering")?

   (f) Bij welk atomair stralingsproces wordt er door het atoom energie **onttrokken** aan het omringende elektromagnetische stralingsveld?

Z.O.Z.

2) Beschouw een ideaal gas van identieke bosonen in drie (ruimtelijke) dimensies. We nemen aan dat de bosonen geen spin hebben ($s = 0$). De dispersierelatie is dan: $\varepsilon(\vec{k}) = \hbar^2 k^2/2m$, met $k = |\vec{k}|$ de lengte van de golfvector $\vec{k}$ en m de massa van de bosonen. Er gelden de volgende uitdrukkingen voor het totale deeltjesaantal N en de totale energie E:

$$N = \int_0^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon)\, n_{\mathrm{BE}}(\varepsilon) \quad \text{en} \quad E = \int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon\, D(\varepsilon)\, n_{\mathrm{BE}}(\varepsilon).$$

(a) Omschrijf zo precies als je kunt de betekenis van $D(\varepsilon)$ en $n_{\mathrm{BE}}(\varepsilon)$.

(b) Laat zien dat geldt: $D(\varepsilon) = C\sqrt{\varepsilon}$, met constante C.
N.B. De precieze uitdrukking voor C wordt niet gevraagd.
Desgewenst kun je aannemen dat de bosonen zich in een (grote) kubus met ribbe L bevinden (volume $V = L^3$) en de golffunctie van de individuele bosonen nul is op de randen van de kubus.

(c) Toon aan dat het volgende verband (*toestandsvergelijking*) tussen de macroscopische grootheden druk P, volume V en totale energie E geldt: $PV = \frac{2}{3}E$.
Gebruik de volgende gegevens uit de statistische fysica: de *grand potential* $\psi(\alpha, \beta, V)$ hangt als volgt samen met de druk P:

$$\psi(\alpha, \beta, V) = \beta P V \ ,$$

en kan bij bekende één-deeltjes energieën ε_k voor bosonen als volgt berekend worden:

$$\psi(\alpha, \beta, V) = -\sum_k \ln\left[1 - e^{-(\alpha+\beta\varepsilon_k)}\right] \ ,$$

waarbij in de som k een label is voor de één-deeltjestoestanden en ε_k de energie van de betreffende één-deeltjestoestand. Zoals vaak in de statistische fysica geldt: $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$.
Hints: 1) Schrijf de som over labels k (eventueel eerst als som over golfvectoren $\vec{k}$ en dan) als integraal over energie ε; 2) Gebruik zonodig: $\ln(1+\delta) \simeq \delta$ *voor* $\delta \ll 1$.

(d) Laat zien dat $PV < Nk_{\mathrm{B}}T$.

(e) De ideale gaswet, $PV = Nk_{\mathrm{B}}T$, geldt dus niet voor ideale Bose gassen. Geef een kwalitatieve, fysische verklaring voor de afwijking van de ideale gaswet.

3) Beschouw het waterstofatoom, d.w.z. een proton met een elektron dat via de Coulomb-wisselwerking aan het proton gebonden is. Het elektron en proton hebben beiden spin $\frac{1}{2}$. In de grondtoestand van het waterstofatoom, met quantumgetallen $n = 1, \ell = 0$, leveren de *fijnstructuur*correcties geen splitsing van het energieniveau, maar slechts een verschuiving (*shift*). De *hyperfijnstructuur* levert wel een splitsing van de grondtoestand (die de bekende *21 cm lijn* tot gevolg heeft). We onderzoeken nu de verdere splitsing van de grondtoestand-inclusief-hyperfijnstructuur ten gevolge van een Zeeman magneetveld.

Indien we de kernspin (in dit geval: protonspin) weergeven met $\vec{I}$ en de elektronspin met $\vec{S}$, wordt de hyperfijninteractie term in de Hamiltoniaan gegeven door:

$$H'_{\mathrm{hf}} = \frac{A}{\hbar^2}\,\vec{S}\cdot\vec{I} \quad ,$$

met A een constante. We noemen de totale (kern- plus elektron-)spin $\vec{F}$: $\vec{F} = \vec{I} + \vec{S}$.

(a) Bij de totale spin $\vec{F}$ horen op de gebruikelijke manier quantumgetallen f en m_f. Wat zijn de 4 toestanden $|f\ m_f\rangle$ voor de grondtoestand van het waterstofatoom?

Stellen we het waterstofatoom in de grondtoestand nu bloot aan een Zeeman magneetveld langs de z-as, ter grootte B, dan komt er een term bij in de Hamiltoniaan:

$$H'_{\mathrm{Z}} = \frac{2\mu_{\mathrm{B}}B}{\hbar}\,S_z$$

(μ_{B} is het Bohr-magneton, een eenheid voor magnetisch moment; de z-component van de kernspin is weggelaten, o.a. omdat die een verwaarloosbare bijdrage geeft)

(b) Waarom mag de grootheid L_z (z-component van het baanimpulsmoment van het elektron) hier uit H'_{Z} weggelaten worden?

(c) De toestanden $|f\ m_f\rangle$ zijn eigentoestanden van H'_{hf}, dus de matrix van H'_{hf} in de basis van toestanden $|f\ m_f\rangle$ is diagonaal. Geef de volledige matrix van H'_{hf} in de $|f\ m_f\rangle$-basis.

(d) Twee van de toestanden $|f\ m_f\rangle$ zijn géén eigentoestanden van S_z, d.w.z. $\langle S_z\rangle = 0$ in deze toestanden. Laat via een berekening zien dat:

$$\langle 0\ 0|H'_{\mathrm{Z}}|1\ 0\rangle = \mu_{\mathrm{B}}B$$

Geef vervolgens de volledige matrix van H'_{Z} in de $|f\ m_f\rangle$-basis.

(e) Bereken of construeer voor de grondtoestand van het waterstofatoom zo volledig mogelijk het *Rabi-diagram*, het energieniveauschema als functie van het (extern) magneetveld B. Geef bij elke curve de waarde van m_f aan.
Hint: Een constructie zou kunnen gaan via een aparte beschouwing van de twee gevallen van een zeer zwak en een zeer sterk magneetveld.

(f) Atomen in bepaalde toestanden zullen in een inhomogeen magneetveld gebieden met een hoog magneetveld opzoeken: de zgn. *high-field seekers*. Beredeneer om welke $|f\ m_f\rangle$ toestanden het hier gaat.