ANTWOORDEN EN UITWERKINGEN
TENTAMEN QUANTUMMECHANICA 2
VAN 14 JUNI 2013

1) (Andere antwoorden zijn niet noodzakelijk (geheel) incorrect)

(a) Volgens het Pauli-principe kunnen fermionen zich niet in dezelfde quantumtoestand bevinden. Deze fermionen hebben spin $\frac{1}{2}$ dus ze kunnen zich in twee verschillende spintoestanden bevinden ($m_s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$; spin up of spin down); d.w.z. in de laagste energietoestand van de harmonische-oscillatorpotentiaal $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ kunnen (maximaal) twee van deze fermionen zitten! De laagstmogelijke energie (= grondtoestandsenergie) voor drie fermionen is dan: $2E_0 + E_1 = \hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\omega = \frac{5}{2}\hbar\omega$.
(*Slechts een kwart van de deelnemers had dit (helemaal) goed!*)

(b) De verdeling voor bosonen is: $n_{\mathrm{BE}}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}-1} = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/(k_{\mathrm{B}}T)}-1}$. Voor <u>massaloze</u> bosonen geldt: $\mu = 0$, ofwel $\alpha = 0$ zodat het juiste antwoord is:

$$n_(\varepsilon; T) = \frac{1}{e^{\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T} - 1}$$

(c) Mogelijke situaties (zie paragraaf 6.2.1 in Griffiths; één van beide noemen is voldoende):
(i) ψ_a^0 en ψ_b^0 zijn ook eigentoestanden van H' (dit is equivalent met: H' en $H^{(0)}$ commuteren),
(ii) ψ_a^0 en ψ_b^0 zijn eigentoestanden van een *hermitese* operator A, die met zowel H' als $H^{(0)}$ commuteert.

(d) De bedoelde golflengte is 21 cm (de beroemde *21 cm lijn* van waterstof), dus vrijwel precies even groot als de breedte van een vel A4-papier!

(e) Bevat een factor ω_0^3 (zie bv. Griffiths [9.54]), dus: $n = 3$.

2) *(Deze opgave lijkt op Opgave 11 van het werkcollege; de dimensie is hier niet willekeurig, maar gelijk aan 2. Bestudeer ook de uitwerking van Opgave 11)*

(a) (*Hier wordt expliciet naar de* betekenis *gevraagd: een* naam *is dus niet voldoende*)
$D(\varepsilon)$: de toestandsdichtheid, d.w.z. $D(\varepsilon)d\varepsilon$ is het aantal toestanden met energie tussen ε en $\varepsilon + d\varepsilon$.
($D(\varepsilon)$ *is dus zelf geen* aantal, *maar een* dichtheid *(van toestanden)*)
$n_{\mathrm{BE}}(\varepsilon)$: de Bose-Einstein verdeling, d.w.z. de gemiddelde bezettingsgraad van het één-elektron-niveau met energie ε voor identieke bosonen.
(n_{BE} *is géén kans(verdeling) en ook geen (meest-waarschijnlijk) aantal*)

(b) De energie hangt alleen af van de lengte van golfvector $\vec{k}$. Toestanden kunnen gerepresenteerd worden als roosterpunten in de $\vec{k}$-ruimte. Combineer je dit met het feit dat een schil met dikte dk bij lengte k een oppervlakte heeft gelijk aan $2\pi k dk = d\left(\pi k^2\right)$, dan geldt voor het aantal toestanden met $|\vec{k}|$ tussen k en $k + dk$:

$$g(k)dk = D(\varepsilon)d\varepsilon \qquad \text{met} \;\; g(k) \sim k$$

Dan volgt:

$$D(\varepsilon) = g(k)\left(\frac{d\varepsilon}{dk}\right)^{-1} \sim k\,(k)^{-1} \sim k^0 \sim \varepsilon^0 \qquad ,$$

d.w.z. $D(\varepsilon)$ is onafhankelijk van ε (ofwel: een constante als functie van ε).

(c) Beschouw de integraal voor N:

$$N = \int_0^\infty d\varepsilon\, \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_{\mathrm{B}}T} - 1}$$

Deze integraal stelt voor het aantal bosonen dat niet in de laagste energietoestand ($\vec{k} = 0$) zit. In dit geval (vanwege $D(\varepsilon) =$ constant) kan de integraal onbeperkt groot worden (indien μ naar nul nadert) en zal de $\vec{k} = 0$ toestand niet macroscopisch bezet hoeven worden bij het verlagen van de temperatuur bij vast aantal deeltjes. Er treedt dus géén Bose-Einstein condensatie op in een twee-dimensionaal ideaal Bose gas!
(Indien de bosonen wisselwerken en/of (bv.) in een harmonische-oscillatorpotentiaal zitten kan het weer wel)

3) (a) De term in de Hamiltoniaan t.g.v. het magneetveld is:

$$\tilde{H}'_{\mathrm{Z}} = g_\ell \mu_{\mathrm{B}} L_z B/\hbar$$

voor $\vec{B}$ in de z-richting. De werking van L_z op een toestand is:

$$L_z|n\ \ell\ m_\ell\rangle = m_\ell \hbar\,|n\ \ell\ m_\ell\rangle \quad ,$$

zodat:

$$E_{\mathrm{Z}} = \langle n\ \ell\ m_\ell|\,\tilde{H}'_{\mathrm{Z}}\,|n\ \ell\ m_\ell\rangle = g_\ell \mu_{\mathrm{B}} B m_\ell$$

Voor $\ell = 1$: $m_\ell = -1, 0, 1$ zodat het gevraagde diagram (hier niet getekend) er een is met drie rechte lijnen die komen uit een punt bij $B = 0$ met hellingen $g_\ell, 0, -g_\ell$ voor $m_\ell = 1, 0, -1$, respectievelijk.

(b) We kregen $\vec{L}\cdot\vec{S}$ door $J^2 = \vec{J}\cdot\vec{J}$ te bekijken (zie Griffiths). Dan krijg je $\vec{L}\cdot\vec{J}$ door $S^2 = \vec{S}\cdot\vec{S}$ te bekijken:

$$S^2 = \vec{S}\cdot\vec{S} = (\vec{J}-\vec{L})\cdot(\vec{J}-\vec{L}) = J^2 + L^2 - 2\vec{L}\cdot\vec{J}$$

dan:

$$\vec{L}\cdot\vec{J} = \tfrac{1}{2}\left(J^2 + L^2 - S^2\right) \ .$$

De $|n\ \ell\ j\ m_j\rangle$ zijn eigentoestanden van J^2, L^2 en S^2; bv. $J^2|n\ \ell\ j\ m_j\rangle = j(j+1)\hbar^2|n\ \ell\ j\ m_j\rangle$. Dan volgt:

$$\langle\vec{L}\cdot\vec{J}\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1)\right] \ .$$

(*Indien je hier al $s = \frac{1}{2}$ hebt ingevuld, is dat ook goed*)

(c) (*Samen met onderdeel (d) is dit in feite Opgave 24 van het werkcollege. Zie ook de bijbehorende uitwerking op* Blackboard) Het is belangrijk op te merken (iets wat niet velen deden) dat t.g.v. de fijnstructuur voor $B = 0$ het enkele niveau in (a) opsplitst in twee niveaus: één voor $j = \frac{1}{2}(= \ell - s)$ en één voor $j = \frac{3}{2}(= \ell + s)$. Vanuit die twee niveaus voor $B = 0$ lopen weer rechte lijnen als functie van $\mu_{\mathrm{B}}B$: twee vanuit het lagere $j = \frac{1}{2}$ niveau (voor $m_j = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$), vier vanuit het (hogere) $j = \frac{3}{2}$ niveau (voor $m_j = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$). Voor de hellingen is het nodig g_j te berekenen; m.b.v. de in de opgave gegeven formule: $g_{\frac{1}{2}} = \ldots = \frac{2}{3}$ en $g_{\frac{3}{2}} = \ldots = \frac{4}{3}$. De hellingen zijn dan: vanuit $E_{2p_{\frac{1}{2}}}$: $\pm\frac{1}{3}$ en vanuit $E_{2p_{\frac{3}{2}}}$: $\pm\frac{2}{3}, \pm 2$.

(d) Voor $n = 2$ en $\ell = 0$ hebben we alleen $j = \frac{1}{2}(= \ell + s)$. De bijbehorende (rechte) lijnen in het energiediagram beginnen vanuit het energieniveau $E_{2p_{\frac{1}{2}}}$ (want de waarde van j is hetzelfde). De twee hellingen zijn: $\tilde{g}_{\frac{1}{2}} m_j$ ($m_j = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$), waarbij $\tilde{g}_{\frac{1}{2}}$ weer met de gegeven formule berekend dient te worden (maar nu met $\ell = 0$; vandaar de ˜). Uitkomst: $\tilde{g}_{\frac{1}{2}} = \ldots = 2$ en hellingen ± 1.
Hiermee is het gevraagde diagram eenvoudig te tekenen (hier niet gedaan).

4) (a) Vanwege de selectieregels, $\Delta\ell = \pm 1$ en $\Delta m = -1, 0, 1$, zijn de drie mogelijke vervalroutes:

$$|3\,0\,0\rangle \longrightarrow |2\,1\,0\rangle \longrightarrow |1\,0\,0\rangle$$
$$|3\,0\,0\rangle \longrightarrow |2\,1\,1\rangle \longrightarrow |1\,0\,0\rangle$$
$$|3\,0\,0\rangle \longrightarrow |2\,1\,-1\rangle \longrightarrow |1\,0\,0\rangle$$

(b) ψ_{210} bevat $r\cos\theta = z$. Samen met de factor z waarvan je het matrixelement wilt geeft dit z^2, waardoor de hele integrand <u>even</u> is in z (en ook in x en y; de golffuncties bevatten verder alleen $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$). De integraal voor $\langle 300|\, z\, |210\rangle$ zal dus ongelijk nul zijn. Voor ψ_{211} en ψ_{21-1} is de integrand oneven in z (bevat factor $z(x \pm iy)$) en de integraal zal nul opleveren.

De integrand voor de berekening van $\langle 300|\, z\, |210\rangle$ is:

$$\frac{1}{\sqrt{27\pi a^3}}\frac{1}{\sqrt{32\pi a^3}}\left(1 - \frac{2r}{3a} + \frac{2r^2}{27a^2}\right) e^{-r/3a}\, \frac{r}{a}\cos\theta\, e^{-r/2a}\, r\cos\theta\, r^2\sin\theta$$

(Vergeet niet de Jacobiaan $r^2\sin\theta$ voor integratie over bolcoördinaten r, θ, ϕ)
Dit moet over r, θ, ϕ geïntegreerd worden:
- ϕ-integraal: $\int_0^{2\pi} d\phi\, 1 = 2\pi$
- θ-integraal: $\int_0^{\pi} d\theta\, \cos^2\theta\sin\theta = \frac{2}{3}$ (zie tabel)
- r-integraal: $\int_0^{\infty} dr\, \left(r^4 - \frac{2r^5}{3a} + \frac{2r^6}{27a^2}\right) e^{-5r/6a}$; via de tabel ($\int_0^\infty x^n e^{-x/b}dx = n!\, b^{n+1}$ met $b = 5/(6a)$) geeft dit: $a^5\left[4!\left(\frac{6}{5}\right)^5 - \frac{2}{3}\,5!\left(\frac{6}{5}\right)^6 + \frac{2}{27}\,6!\left(\frac{6}{5}\right)^7\right]$. Voor de uitdrukking tussen rechte haken kan weer de tabel gebruikt worden en alle resultaten bij elkaar levert op:

$$\langle 300|\, z\, |210\rangle = \frac{2^8 3^4}{5^6\sqrt{6}}\, a \quad ,$$

zodat uiteindelijk het gevraagde dipoolmatrixelement is: $\boxed{P_{1,z} = -\frac{2^8 3^4}{5^6\sqrt{6}}\, ea}$

(c) In zijn algemeenheid geldt: $|\vec{P}|^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$.
Voor route 1 is alleen de z-component ongelijk aan nul, aangezien de integrand voor P_x en P_y factoren $x\, r\cos\theta = xz$ en $y\, r\cos\theta = yz$ bevat, d.w.z. oneven is in z (en de integraal daardoor nul is). Dus voor route 1 geldt: $|\vec{P}|^2 = P_{1,z}^2$.
Voor route 2 en 3 is de z-component gelijk nul (zie onderdeel (b)) en is gegeven dat: $P_x^2 = P_y^2 = \frac{1}{2}P_{1,z}^2$. Daarom voor route 2 en 3: $|\vec{P}|^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = \frac{1}{2}P_{1,z}^2 + \frac{1}{2}P_{1,z}^2 + 0 = P_{1,z}^2$, hetgeen hetzelfde is als voor route 1 $\longrightarrow$ voor alledrie de routes is $|\vec{P}|^2$ hetzelfde.

(d)

$$\tau = \frac{1}{A_{\text{tot}}} = \frac{5^9}{2^8\, 3}\frac{m_e c^3}{e^2 E_1^2}\left(\frac{m_e e^2 a}{4}\right) = \frac{5^9}{2^{10}\, 3}\left(\frac{m_e c^2}{E_1}\right)^2 \frac{a}{c}$$

In de tweede stap is de combinatie $\pi\varepsilon_0\hbar^2$ vervangen door de uitdrukking tussen ( ) via de in de opgave gegeven formule voor de Bohrstraal a.