TENTAMEN QUANTUMMECHANICA 2 14 juni 2013

(College Dr. P.J.H. Denteneer, voorjaar 2013) 14 - 17 uur

Schrijf op elk vel dat je inlevert NAAM, VOORLETTERS en STUDENTNUMMER.
Het tentamen bestaat uit 4 opgaven.
Begin de uitwerking van elke opgave op een nieuwe pagina!
Met elke opgave zijn 25 punten te verdienen, met elk onderdeel 5 punten, behalve onderdelen 2(a), 2(b), 3(c) en 4(b) waarmee 10 punten verdiend kunnen worden.
Bedenk dat gedeeltelijk correcte antwoorden of antwoorden die blijk geven van enig begrip van de vraag of opdracht ook punten op kunnen leveren.

1) Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen of opdrachten (er wordt in deze opgave niet om uitgebreide berekeningen of afleidingen gevraagd):

   (a) Drie identieke, niet-wisselwerkende *fermionen* met spin $\frac{1}{2}$ bevinden zich in een harmonische oscillator potentiaal (oscillatorfrequentie ω); de energie van een enkel fermion kan de volgende waarden hebben: $E_n = (n + \frac{1}{2})\,\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Wat is de grondtoestandsenergie van het systeem van deze drie fermionen?

   (b) Geef de formule voor de gemiddelde bezettingsgraad $n(\varepsilon; T)$ van energieniveau ε bij temperatuur T voor <u>massaloze</u> bosonen.

   (c) Stel dat twee eigentoestanden ψ_a^0 en ψ_b^0 van Hamiltoniaan $H^{(0)}$ dezelfde energie-eigenwaarde E_0 hebben (*ontaarding*). Beschrijf een situatie waarin ondanks de ontaarding toch <u>niet</u>-ontaarde storingsrekening gebruikt mag worden om de eerste-orde energiecorrecties $E_\pm^1$ te berekenen in geval van een storingsterm H' in de Hamiltoniaan.

   (d) Een foton wordt uitgezonden bij de overgang tussen de twee energieniveaus die ontstaan bij de hyperfijnopsplitsing van de grondtoestand van het waterstofatoom. Hoe verhoudt de golflengte van dit foton zich tot de breedte van dit vel (A4-)papier: (i) veel kleiner, (ii) ongeveer even groot of (iii) veel groter?

   (e) De Einstein A en B coëfficienten die samenhangen met de emissie van straling verhouden zich via een factor die de (hoek)frequentie ω_0 tot de macht n bevat. Wat is de waarde van n?

2) Beschouw een ideaal gas van identieke bosonen in **twee** (ruimtelijke) dimensies. We nemen aan dat de bosonen geen spin hebben ($s = 0$) en allemaal dezelfde massa m. De dispersierelatie is dan: $\varepsilon(\vec{k}) = \hbar^2 k^2/2m$, met $k = |\vec{k}|$ de lengte van de golfvector $\vec{k}$. Neem aan dat de bosonen zich in een (groot) vierkant met zijde L bevinden (oppervlak $O = L^2$) en de componenten van de golfvector $\vec{k}$ slechts gehele veelvouden van $2\pi/L$ kunnen zijn. Er gelden de volgende uitdrukkingen voor het totale deeltjesaantal N en de totale energie E:

$$N = \int_0^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon)\, n_{\rm BE}(\varepsilon) \quad \text{en} \quad E = \int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon\, D(\varepsilon)\, n_{\rm BE}(\varepsilon).$$

Z.O.Z.

(a) Omschrijf inhoudelijk de betekenis van $D(\varepsilon)$ en $n_{\mathrm{BE}}(\varepsilon)$.

(b) Laat zien dat $D(\varepsilon)$ onafhankelijk is van ε.

(c) Beargumenteer aan de hand van de resultaten en formules hierboven of er in een twee-dimensionaal ideaal Bose gas al dan niet *Bose-Einstein condensatie* kan optreden.

3) Beschouw het waterstofatoom, d.w.z. een proton met een elektron dat via de Coulomb-wisselwerking aan het proton gebonden is, geplaatst in een extern magneetveld. We laten eerst de spin (van zowel elektron als proton) buiten beschouwing. Eigentoestanden (en bijbehorende golffuncties) worden beschreven met quantumgetallen: n, ℓ, m_ℓ. De storingsterm in de Hamiltoniaan die het effect van een magneetveld $\vec{B}$ beschrijft is:

$$\tilde{H}'_{\mathrm{Z}} = g_\ell \mu_{\mathrm{B}} \frac{\vec{L}\cdot\vec{B}}{\hbar} \quad ,$$

waarin g_ℓ de gyromagnetische verhouding is voor de orbitaalbeweging, μ_{B} het Bohr-magneton (een eenheid voor magnetisch moment) en $\vec{L}$ het baanimpulsmoment.

(a) Bereken de verandering van de energie, E_{Z}, van de eigentoestanden met quantumgetallen $n = 2$ en $\ell = 1$ t.g.v. een magneetveld in de z-richting, $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$, en schets het bijbehorende energiediagram: $\tilde{E}_{2p}$ als functie van $\mu_{\mathrm{B}}B$.

We nemen nu de elektronspin $\vec{S}$ in beschouwing. De storingsterm t.g.v. het magneetveld is dan:

$$H'_{\mathrm{Z}} = \frac{\mu_{\mathrm{B}}}{\hbar}\left(g_\ell\vec{L} + g_e\vec{S}\right)\cdot\vec{B} \quad ,$$

waarin g_e de gyromagnetische verhouding is van het elektron. Gebruik in het vervolg dat: $g_\ell = 1$ en $g_e = 2$ (in zeer goede benadering is dat waar). Voor een *zwak* magneetveld is het nodig de *fijnstructuur* (fs) in rekening te brengen: H'_{Z} is dan een storing op $H_0 + H_{\mathrm{fs}}$. De eigentoestanden van het ongestoorde probleem zijn dan weer te geven als: $|n\,\ell\,j\,m_j\rangle$, waarin j en m_j de quantumgetallen zijn die horen bij de somvector $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Deze toestanden zijn ook eigentoestanden van L^2 en S^2.

(b) Bereken de verwachtingswaarde van $\vec{L}\cdot\vec{J}$ in de toestand $|n\,\ell\,j\,m_j\rangle$.

Het is mogelijk te laten zien (maar dat wordt hier niet gevraagd) dat de eerste-orde correctie op de energie t.g.v. een zwak magneetveld in de z-richting gegeven wordt door:

$$E^1_{\mathrm{Z}} = g_j \mu_{\mathrm{B}} B m_j \quad \text{met} \quad g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2j(j+1)}$$

(c) Teken het nieuwe energiediagram, E_{2p} als functie van $\mu_{\mathrm{B}}B$, wanneer rekening wordt gehouden met elektronspin. Geef bij elke curve de helling aan.

(d) Voeg aan het diagram van (c) de energieën toe van de $n = 2, \ell = 0$ toestanden.

4) Indien we elektronspin en fijnstructuur buiten beschouwing laten, kunnen toestanden van het elektron in het waterstof-atoom weergegeven worden als $|n\ell m\rangle$, met bijbehorende golffuncties $\psi_{n\ell m}$. Een elektron in de $n = 3, \ell = 0, m = 0$ toestand van het waterstofatoom vervalt via twee *elektrische-dipool overgangen* naar de grondtoestand. Gegeven zijn twee selectieregels voor dergelijke overgangen: $\Delta m = -1, 0, 1$ en $\Delta \ell = \pm 1$.

(a) Geef de drie mogelijke vervalroutes. Gebruik de notatie:

$$|3\,0\,0\rangle \;\longrightarrow\; |n\,\ell\,m\rangle \;\longrightarrow\; |1\,0\,0\rangle$$

Van belang voor dergelijke overgangen is de grootte van het (niet-diagonale) matrixelement van de elektrische dipool: $\vec{P} = -e\,\langle n'\ell' m'|\,\vec{r}\,|n\ell m\rangle$ (e: eenheidslading, $\vec{r} = (x, y, z)$: positie-vector). In de tabel hieronder (**Z.O.Z.**) worden enkele golffuncties gegeven, uitgedrukt in bolcoördinaten (r, θ, ϕ), en verder enkele integralen die behulpzaam kunnen zijn bij het beantwoorden van de vragen.

(b) Voor welke toestand $|2\,\ell\,m\rangle$ geldt: $\langle 300|\,z\,|2\ell m\rangle \neq 0$? Bereken voor de bijbehorende overgang (*vervalroute 1*) de z-component van het matrixelement van de elektrische dipool, $P_{1,z} = -e\,\langle 300|\,z\,|2\ell m\rangle$ (Maak gul gebruik van de tabel; laat machten van 2 , 3 en 5 in je berekeningen staan).

(c) Het blijkt dat voor de (eerste overgang in de) twee andere routes (*vervalroutes 2 en 3*) het x- en y-matrixelement in absolute waarde aan elkaar gelijk zijn en dat ze een factor $\sqrt{2}$ kleiner zijn dan het in (b) berekende z-matrixelement: $\langle \cdots |\,z\,| \cdots \rangle = \sqrt{2}\,\langle \cdots |\,x\,| \cdots \rangle$. Beargumenteer dat $|\vec{P}|^2$ voor de (eerste overgang in de) drie vervalroutes hetzelfde is.

De algemene formule voor de spontane emissie *rate* is: $A = \frac{\omega_0^3 |\vec{P}|^2}{3\pi\varepsilon_0 \hbar c^3}$, waarin $\vec{P}$ het dipool-matrixelement tussen twee toestanden is en $\hbar\omega_0$ de energie van de overgang.

(d) Leidt een formule af voor de levensduur τ van de toestand $|300\rangle$, uitgedrukt in de twee verhoudingen $E_1/m_e c^2$ en c/a (c: lichtsnelheid, m_e: massa van het elektron). Maak gebruik van het feit dat de totale spontane emissie *rate* (o.a. vanwege (c)) gegeven wordt door:

$$A_{\text{tot}} = 3A = \frac{2^8\,3}{5^9}\,\frac{e^2 E_1^2}{\pi\varepsilon_0 \hbar^2 m_e c^3}$$

Gebruik zonodig de volgende formules: $a = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ en $E_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_e a^2}$

(Z.O.Z.)

$$
\begin{aligned}
x, y, z \text{ in } \ \text{bolcöordinaten} \quad &: \quad x = r\sin\theta\cos\phi,\ \ y = r\sin\theta\sin\phi,\ \ z = r\cos\theta \\
\psi_{100} &= \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\, e^{-r/a} \qquad\qquad\qquad a : \text{Bohr} - \text{straal} \\
\psi_{200} &= \frac{1}{\sqrt{8\pi a^3}} \left(1 - \frac{r}{2a}\right)\, e^{-r/2a} \\
\psi_{210} &= \frac{1}{\sqrt{32\pi a^3}}\, \frac{r}{a}\, e^{-r/2a} \cos\theta \\
\psi_{21\pm1} &= \frac{\mp 1}{8\sqrt{\pi a^3}}\, \frac{r}{a}\, e^{-r/2a} e^{\pm i\phi} \sin\theta \\
\psi_{300} &= \frac{1}{\sqrt{27\pi a^3}} \left(1 - \frac{2r}{3a} + \frac{2r^2}{27a^2}\right)\, e^{-r/3a} \\
\int_0^\pi \sin^n(\theta)\cos(\theta)d\theta &= 0 \qquad\qquad n : \text{geheel}, \text{niet} - \text{negatief} \\
\int_0^\pi \cos^n(\theta)\sin(\theta)d\theta &= \frac{1}{n+1}\left(1 - (-1)^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^{2\pi} e^{in\phi} d\phi = 0 \qquad (n \neq 0) \qquad\qquad\qquad \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi)d\phi = \pi
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty x^n e^{-x/b} dx &= n!\, b^{n+1} \\
4!\left(\frac{6}{5}\right)^5 - \frac{2}{3}\, 5!\left(\frac{6}{5}\right)^6 + \frac{2}{27}\, 6!\left(\frac{6}{5}\right)^7 &= \frac{4!}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^5 = \frac{2^8 3^6}{5^6}
\end{aligned}
$$