Uitwerking Tentamen

Relativistische Elektrodynamica

10 juni 2013

Opgave 1

a. $dx = \gamma(d\bar{x} + vd\bar{t})$, $dt = \gamma(d\bar{t} + vd\bar{x}/c^2)$, $dy = d\bar{y}$. Daarnaast geldt $d\bar{z} = dz$, maar de z-componenten zijn en blijven nul, en spelen geen rol.

b. Aangezien $d\bar{x}/d\bar{t} = 0$ vinden we

$$u_x \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(d\bar{x} + vd\bar{t})}{\gamma(d\bar{t} + vd\bar{x}/c^2)} = v \ , \ u_y \equiv \frac{dy}{dt} = \frac{d\bar{y}}{\gamma(d\bar{t} + vd\bar{x}/c^2)} = \bar{u}/\gamma \ .$$

De grootte van de snelheid in S is $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{v^2 + \bar{u}^2 - v^2\bar{u}^2/c^2}$. De hoek θ is bepaald door $\tan\theta = \bar{u}/(\gamma v)$ (kleiner dan de niet-relativistische hoek).

c. De energie wordt bepaald door de relatie $\bar{E}^2 = m^2c^4 + c^2\bar{p}^2$.

d. Uit de Lorentztransformatie voor energie en impuls volgt dan
$p_x = \gamma(\bar{p}_x + v\bar{E}/c^2) = (\gamma v/c)\sqrt{m^2c^2 + \bar{p}^2}$,
$E = \gamma(\bar{E} + v\bar{p}_x) = \gamma c\sqrt{m^2c^2 + \bar{p}^2}$,
$p_y = \bar{p}_y = \bar{p}$ (en $p_z = \bar{p}_z = 0$).

e. Voor flits geldt $m = 0$, zodat $p_x = \gamma v\bar{p}/c$, en $\tan\theta = p_y/p_x = c/(\gamma v)$ (zelfde resultaat als in b., bij $\bar{u} = c$).

Opgave 2

a. $\mathbf{p}_+ = \hat{\mathbf{x}}E_+/c$, $\mathbf{p}_- = -\hat{\mathbf{x}}E_-/c$.

b. Impuls en energie zijn additief, zodat $\mathbf{P} = \mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- = \hat{\mathbf{x}}(E_+ - E_-)/c$, $E = E_+ + E_-$.

c. Uit de Lorentztransformatie volgt $\bar{P}_y = P_y = 0$, $\bar{P}_z = P_z = 0$, terwijl
$\bar{P}_x = \gamma(P_x - vE/c^2) = (\gamma/c)[E_+(1 - v/c) - E_-(1 + v/c)]$,
$\bar{E} = \gamma(E - vP_x) = \gamma[E_+(1 - v/c) + E_-(1 + v/c)]$.

d. $\bar{P}_x = 0$ als $E_+(1-v/c) = E_-(1+v/c)$, ofwel $v = c(E_+ - E_-)/(E_+ + E_-)$.

e. Bij deze snelheid v geldt $\gamma = (E_+ + E_-)/\sqrt{4E_+E_-}$, zodat $\bar{E}_+ = \gamma E_+(1+v/c) = \sqrt{E_+E_-}$, $\bar{E}_- = \gamma E_-(1-v/c) = \sqrt{E_+E_-}$. [Dat $\bar{E}_+$ en $\bar{E}_-$ gelijk zijn is begrijpelijk, aangezien de impulsen $\bar{P}_+$ en $\bar{P}_-$ elkaars tegengestelde moeten zijn in het stelsel waar $\bar{P} = 0$.]

Opgave 3.

a. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial \mathbf{A}/\partial t = i\omega \hat{\mathbf{y}} F \exp(ikz - i\omega t)$,
$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A} = ik\hat{\mathbf{z}} F \exp(ikz - i\omega t)$.

b. $A^\mu = (0, 0, F\exp(ikz - i\omega t), 0)$. Uit Lorentztransformatie volgt $\bar{A}^0 = \gamma(A^0 - vA^1/c) = 0$, etc, zodat $\bar{A}^\mu = A^\mu = (0, 0, F\exp(ikz - i\omega t), 0)$.

c. Omdat $x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$, $t = \gamma(\bar{t} + v\bar{x}/c^2)$ geldt $kx - \omega t = k\gamma(\bar{x} + v\bar{t}) - \omega\gamma(\bar{t} + v\bar{x}/c^2)$. Dit is gelijk aan $\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t}$ met $\bar{k} = \gamma(k - \omega v/c^2)$, $\bar{\omega} = \gamma(\omega - vk)$. Dus $k^\mu = (k_x, k_y, k_z, \omega/c)$ transformeert als een contravariante 4-vector. [Merk op dat de fasefactor $kx - \omega t$ ook geschreven kan worden $k^\mu x_\mu$. Dit is een invariant.]

d. In het stelsel $\bar{S}$ geldt $\bar{\mathbf{E}} = -\partial\bar{\mathbf{A}}/\partial\bar{t}$, zodat $\bar{E}_y = i\bar{\omega}F\exp(i\bar{k}\bar{y} - i\bar{\omega}\bar{t})$,
$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{A}}$, zodat $\bar{B}_z = i\bar{k}F\exp(i\bar{k}\bar{x} - i\bar{\omega}\bar{t})$.

e. Op grond van de uitdrukkingen voor $\bar{\omega}$ en $\bar{k}$ uit c. blijkt direct dat $\bar{E}_y = \gamma(E_y - vB_z)$, $\bar{B}_z = \gamma(B_z - vE_y/c^2)$.