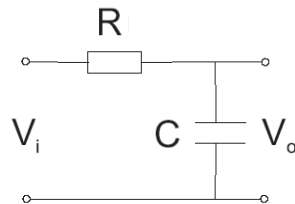


Tentamen Signaal Verwerking en Ruis
Dinsdag 10 – 13 uur, 15 december 2009

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven verdeeld over drie bladzijden.
U heeft drie uur de tijd.

1. Staprespons van een filter [elk onderdeel 2 punten].



a) Leid de differentiaalvergelijking af die het verband geeft tussen de uitgangsspanning V_o en de ingangsspanning V_i .

Op $t=0$ is de condensator ongeladen en verandert de ingangsspanning instantaan van 0 naar V . Dit blijft zo tot $t = T$ wanneer de ingangsspanning weer naar 0 springt.

b) Leid de uitdrukking af voor $V_o(t)$ en schets dit tijdsverloop voor een lange puls ($T \gg RC$).

c) Schets ook het tijdsverloop voor een korte puls ($T \ll RC$). Geef ook waarden aan bij de assen.

d) Waarom zou je dit filter een laagdoorlaat filter noemen?

a) $V_i = IR + V_o$ en $V_o = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt$ en dan moet je nog van I afzien te komen. Uit de eerste vergelijking krijg je $I = (V_i - V_o)/R$ dus $V_o = \frac{1}{RC} \int (V_i - V_o) dt$ en dan is de totale differentiaal vergelijking $V_o + \frac{1}{RC} \int V_o dt = \frac{1}{RC} \int V_i dt$.

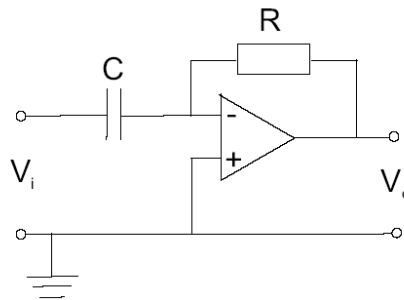
b) Op tijd $t=0$ begin je met een grote stroom, die afneemt naarmate de condensator opgeladen raakt. Als de stroom nul wordt eindig je met $V_o = V$.
 $V_o = V(1 - \exp(-t/RC))$.

Of je begint met een trial functie $C_0 + C_1 \exp(t/\tau)$.

c) Voor een korte pulse neemt de spanning lineair toe vanaf $t=0$. De stroom is namelijk constante zolang de condensator nog niet de kans heeft gehad zich op te laden. Het ontladen gebeurt wel op exponentiële wijze.

d) Lage frequenties komen wel aan op de uitgang, hoge frequenties niet.

2. De differentiator [elk onderdeel 2 punten].
Onderstaande opamp schakeling wordt een differentiator genoemd.

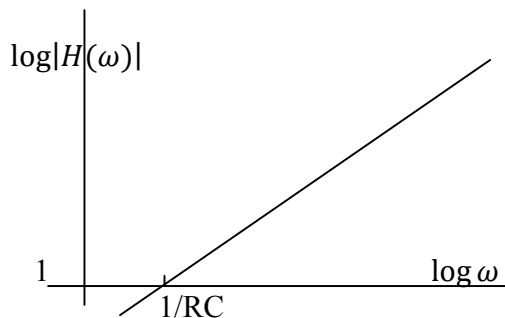


- a) Verklaar de naam ‘differentiator’
De uitgangsspanning is evenredig met de Stroom door de weerstand R. De stroom is de tijdsafgeleide van de lading over de condensator en dus de tijdsafgeleide van de ingangsspanning. Ergo, de uitgangsspanning is evenredig met de tijdsafgeleide van de ingangsspanning.
- b) Bereken de overdrachtsfunctie $H(\omega) = V_o(\omega)/V_i(\omega)$ en schets $|H(\omega)|$ voor het geval de gain van de opamp oneindig is.

*Omdat de feedback negatief is (naar de inverterende ingang van de opamp gaat) mogen we ervan uitgaan dat de schakeling stabiel is en omdat de gain van de opamp oneindig is mogen we er dus van uitgaan dat de spanning op de inverterende ingang gelijk nul is. Dan is de uitgangsspanning $V_{out} = -I * R$ als we de stroom zo definiëren dat die positief is wanneer die naar rechts stroomt.*

*De stroom is (gebruik makende van $V=I*Z$) $I = V_{in}/(\frac{1}{j\omega C})$ dus $H(\omega) = -j\omega CR$.*

$$|H(\omega)| = \omega CR$$



Nu wordt in serie met de condensator C een extra weerstand R_1 geschakeld.

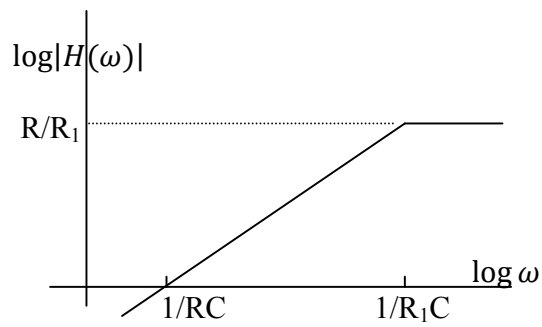
- c) Bereken opnieuw $H(\omega)$ en schets $|H(\omega)|$. In welk frequentiegebied werkt de schakeling nu als een differentiator?

*We kunnen nog steeds blijven zeggen dat $V_{out} = -I * R$ maar nu geldt:*

$$I = V_{in}/(R_1 + \frac{1}{j\omega C}) \text{ en dus } H(\omega) = -\frac{R}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = -\frac{j\omega CR}{j\omega CR_1 + 1}$$

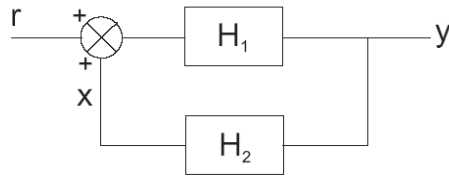
Dat is hetzelfde als het antwoord voor b) wanneer $\omega CR_1 \ll 1$ dus voor frequenties $\omega < \frac{1}{CR_1}$ werkt de schakeling als een differentiator. Voor hoge frequenties is de overdracht $H=R/R_1$, (omdat dan $\omega CR_1 \gg 1$).

$$|H(\omega)| =$$

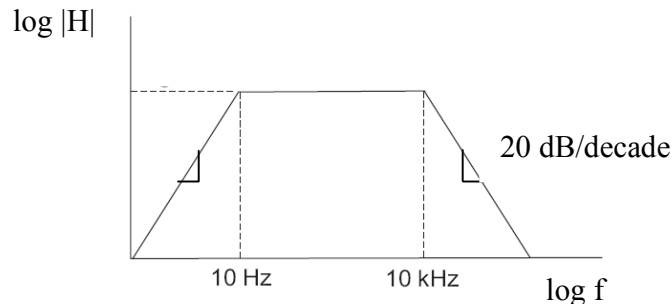


- d) Wat is het nut van deze extra weerstand in de schakeling?
Het beperkt de bandbreedte en verhindert ook dat er al te veel ruis is bij hoge frequenties.

3. Feedback van geluid



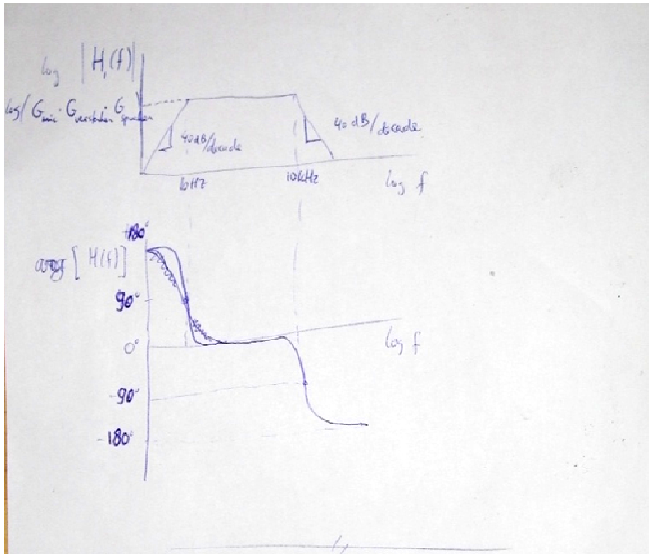
Bovenstaande feedback-loop wordt toegepast op de volgende situatie. Een spreker (r) spreekt via een microfoon waarvan het versterkte geluidssignaal wordt weergegeven door een speaker (y) die op een afstand van $L=3$ m van de microfoon is geplaatst. Het geluid uit de speaker wordt teruggekoppeld naar de microfoon volgens $H_2 = \frac{\alpha}{L} \exp(i2\pi f\tau)$. Neem voor de geluidsvertraging $v=300$ m/sec. Verder zijn de microfoon en speaker van zodanige kwaliteit dat ze ieder afzonderlijk de volgende, nette overdracht hebben. Ze zijn verbonden door een versterker die gekenmerkt wordt door een frequentie onafhankelijke versterkingsfactor, G .



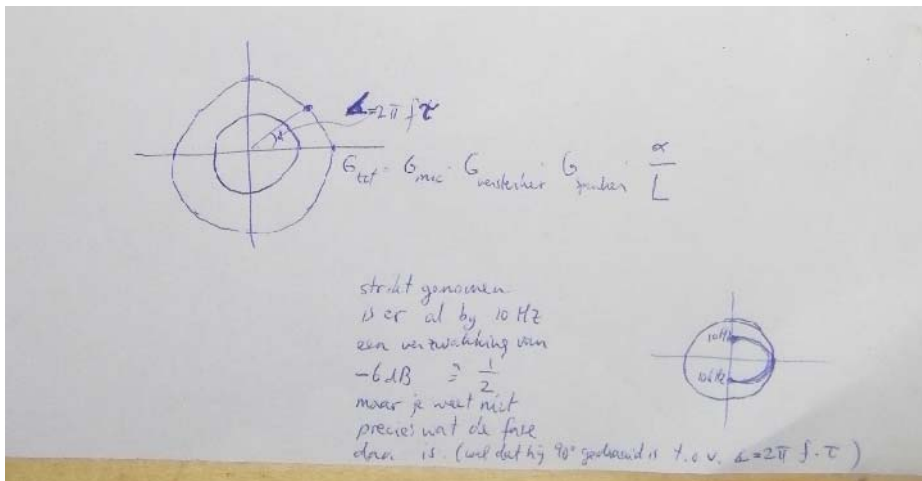
- Is de overdrachtsfunctie van de microfoon (die een luchtdrukfluctuatie omzet in een spanningsfluctuatie) onderdeel van H_1 of H_2 ? [1]
De overdrachtsfunctie van de microfoon is onderdeel van H_1 want de optelling van het geluid van de spreker en het geluid dat uit de speaker komt vind plaats in de lucht, d.w.z. voor de microfoon.
- Waarom heeft H_2 de vorm $H_2 = \frac{\alpha}{L} \exp(i2\pi f\tau)$? [1]
 α is om de eenheden goed te krijgen(het moet dimensieloos worden), $1/L$ is omdat de geluidssterkte afneemt als je de speaker verder van de microfoon afstaat. Het moet $1/L$ zijn omdat het vermogen geïntegreerd over de schil van een bol constant moet zijn. $\exp(i2\pi f\tau)$ beschrijft de fase draaiing ten gevolge van de tijdsvertraging, τ , tussen speaker en microfoon.
- Omschrijf wat 'x' is in de feedback loop die getekend is in het plaatje bovenaan de figuur. [1]
x is het geluid (drukfluctuaties) vlak voor de microfoon, en dan wel alleen het geluid dat van de speakers afkomstig is.
- Geef een uitdrukking voor τ in termen van L . [1]

$$\tau = L/v$$
- Teken $|H_1(f)|$ en $\arg H_1(f)$. [2]
Als microfoon en speaker ieder afzonderlijk een eerste orde laagdoorlaatfilter met een eerste orde hoogdoorlaatfilter combineren, dan is de gecombineerde overdracht

dus die van een een tweede orde laagdoorlaatfilter en een tweede orde hoogdoorlaatfilter. Vandaar dat de fasedraaiingen tot aan 180 graden gaan.



- f) Teken een polaire plot van $H_1 \cdot H_2$ (open lus versterking) in het frequentiegebied van 10 Hz tot 10 kHz, voor verschillende versterkingsfactoren, G. [2]



- g) Druk de gesloten lus versterking $H = y/r$ uit in termen van H_1 en H_2 . [2]
 We beginnen met de twee vergelijkingen die we voor dit systeem kunnen bedenken:
 $y = (r + x)H_1$ en
 $x = yH_2$
 Deze twee vergelijkingen nemen we samen om y/r te vinden. We moeten dus van x af. In elkaar substitueren levert: $y = (r + yH_2)H_1 = rH_1 + yH_2H_1$ en dan de termen met y allemaal naar links. $y(1 - H_2H_1) = rH_1$ en $\frac{y}{r} = H_1/(1 - H_2H_1)$.

- h) Bij welke gain gaat het systeem oscilleren en bij welke frequentie(s) gebeurt dat? [2]
De laagste gain waarbij het systeem kan gaan oscilleren is de gain zodanig dat er een gain van 1 is. Omdat de signalen bij elkaar worden opgeteld is er geen fasedraaiing van 180 graden nodig (oftwel $H_1 \cdot H_2 = 1$). [N.B. Wanneer de feedback om te beginnen negatief zou zijn geweest zou je wel 180 fasedraaiing nodig hebben gehad.] Omdat de gain onder 10 Hz en boven 10 kHz afneemt, en tussen die twee frequenties de fase alle kanten op kan vanwege H_2 , kunnen we ons beperken tot een oplossing tussen 10 Hz en 10 kHz waar we de fasedraaiing gelijk nul mogen veronderstellen.

$$H_1 \cdot H_2 = G_{mic} G_{versterker} G_{speaker} \frac{\alpha}{L} \exp(i2\pi f\tau) = 1$$

$$\text{Dus } G_{versterker} = L / (\alpha G_{mic} G_{speaker})$$

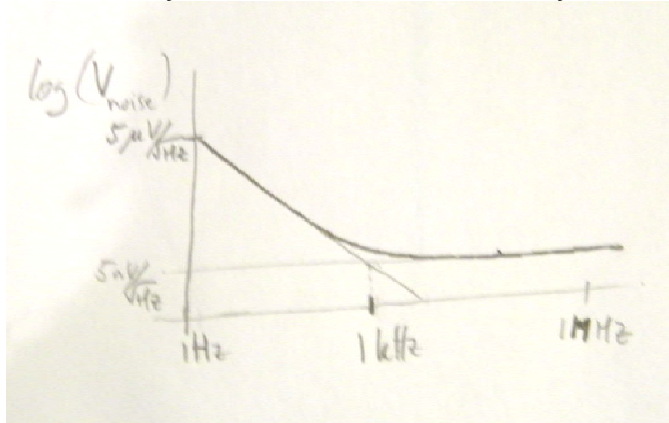
Het gaat oscilleren bij een frequentie die voldoet aan $f\tau = 0, 1, 2, \dots = k$ oftewel $f = k/\tau$ met $k=1, 2, \dots$ want frequentie nul valt af vanwege de fasedraaiing en lage gain bij $f=0$.

4. Een ruisspectrum

Een versterker met een versterkingsfactor van 100 en een bandbreedte van 1 MHz heeft een equivalente ingangsruijs van $5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ maar vertoont ook $1/f$ ruis met een knie bij 1 kHz.

a) Schets een log-log plot van het ruisspectrum. Schrijf getallen aan zowel de x-as als aan de y-as [3].

1/f ruis met een knie bij 1 kHz, betekent dat de ruis toeneemt voor frequenties kleiner dan 1 kHz. Dus bij 100 Hz is het $50 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ en bij 10 Hz is het $500 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$, etc.



b) Bereken de rms waarde van de uitgangsruijs tussen 10 kHz en 1 MHz [2].

Van 10 kHz tot aan 1 MHz is de ruis onafhankelijk van de frequentie. De uitgangsruijs is de versterkte ingangsruijs. Die is dan dus $100 \cdot 5 = 500 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$. In een bandbreedte van $1 \text{ MHz} - 10 \text{ kHz} = 0,99 \text{ MHz}$ is dat ongeveer $\sqrt{0,99 \text{ MHz}} = 1000 \sqrt{\text{Hz}}$ keer zoveel oftewel $500 \mu\text{V}_{\text{RMS}}$

c) Bereken de equivalente ingangsruijs van 1 Hz tot 10 kHz [3].

De witte ruis en de $1/f$ ruis mogen we doorgaans toeschrijven aan twee onafhankelijke ruisbronnen. De witte ruisbron draagt $\sqrt{10 \text{ kHz}} \cdot 5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}} = 500 \text{ nV}_{\text{RMS}}$ bij.

De $1/f$ ruis is gegeven door $V_{\text{noise}} = (1000 \text{ Hz}/f) \cdot 5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$. De integraal ziet er dan uit als:

$$\sqrt{\int_{1 \text{ Hz}}^{10 \text{ kHz}} V_{\text{noise}}^2 df} = 1000 \text{ Hz} \cdot \frac{5 \text{ nV}}{\sqrt{\text{Hz}}} \sqrt{\int_{1 \text{ Hz}}^{10 \text{ kHz}} \frac{1}{f^2} df} = 1000 \text{ Hz} \cdot \frac{5 \text{ nV}}{\sqrt{\text{Hz}}} \sqrt{\left. \frac{-1}{f} df \right|_{1 \text{ Hz}}^{10 \text{ kHz}}}$$

Dat is dan $5 \mu\text{V}_{\text{RMS}}$. Omdat deze bijdrage 10 keer zo groot is als de witte ruis bijdrage is de totale ruis $\sqrt{1,01} \cdot 5 \mu\text{V}_{\text{RMS}} = 5 \mu\text{V}_{\text{RMS}}$.