HERTENTAMEN STATISTISCHE FYSICA 1 30 januari 2015
(College Dr. P.J.H. Denteneer, najaar 2014) 14:00 - 17:00 uur

Schrijf op elk vel dat je inlevert NAAM, VOORLETTERS en STUDENTNUMMER.
Het tentamen bestaat uit 3 opgaven. Lees de opgaven zorgvuldig!
Begin de uitwerking van elke opgave op een nieuwe pagina.
Met elk onderdeel is 2 punten te verdienen.
Bedenk dat gedeeltelijk correcte antwoorden ook punten op kunnen leveren.

1) Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen of opdrachten (er wordt in deze opgave niet om uitgebreide argumentaties of berekeningen gevraagd):

   (a) Wat is de benadering van Stirling? Geef een formule voor de eenvoudigste vorm van deze benadering.

   (b) Waarom kan bij het bepalen van de entropie van een geïsoleerd, macroscopisch systeem in plaats van het aantal microtoestanden bij vaste totale energie E, $W(E)$, ook het aantal microtoestanden met energie kleiner of gelijk aan E, $\Omega_0(E)$, gebruikt worden?

   (c) Hoeveel vrijheidsgraden heeft een zuurstof molecuul (O_2)?

   (d) Beschrijf het verschil tussen ideale gassen van 2-atomige moleculen en 1-atomige moleculen voor wat betreft de temperatuur-afhankelijkheid van de soortelijke warmte.

   (e) Teken een grafiek van de magnetisatie als functie van een magneetveld (bij vaste temperatuur) voor een systeem van vrije Ising spins.

2) We beschouwen een in een vlak gelegen keten van N gefixeerde magnetische momenten (*spins*) in thermisch evenwicht bij temperatuur T. De spins kunnen, onafhankelijk van elkaar, elk in 4 verschillende toestanden zijn: naar links of naar rechts gericht langs de keten (de *horizontale* toestanden) of gericht loodrecht op het vlak waarin de keten ligt, omhoog/*up* of omlaag/*down* (de *verticale* toestanden). Beide horizontale toestanden hebben een energie 0 (nul), beide verticale toestanden hebben een positieve energie ε.

   (a) Geef de partitiefunctie (of: kanonieke toestandssom) Z_1 van één spin.

   (b) Geef een formule voor de kans dat een willekeurige spin in een verticale toestand is.

   (c) Hoeveel verschillende configuraties van N spins zijn er?

   (d) Geef een formule voor de kans dat N_v van de N spins in een <u>verticale</u> toestand zijn.

   (e) Wat is de formule voor de kans uit (d) voor $T \to \infty$?
   (Je kunt dit ook beredeneren zonder het antwoord op (d))

   (f) Bereken de gemiddelde energie in thermisch evenwicht als functie van T.

Z.O.Z.

(g) Laat via een berekening zien dat de fluctatie in de energie, ΔE, evenredig is met $\sqrt{N}$ en toeneemt bij toenemende temperatuur.
Ter herinnering: $(\Delta E)^2 = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$

3) We beschouwen een ideaal gas van N identieke, onafhankelijke, klassieke harmonische oscillatoren in thermisch evenwicht bij temperatuur T, die kunnen bewegen (als moleculen) in een volume V. De partitiefunctie van 1 oscillator (met hoekfrequentie ω en massa m) wordt gegeven door:

$$Z_1(\beta, V) = \frac{1}{h^3} \int_V d^3\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{p}\; e^{-\beta H(\vec{r},\vec{p})} \quad ,$$

met

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2} m\omega^2 r^2 \quad .$$

De integraties zijn over het hele volume V voor de positie $\vec{r}$ en van $-\infty$ tot ∞ voor elk van de componenten van de impulsvector $\vec{p}$.
($d^3\vec{r} = dxdydz,\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2,\ \ d^3\vec{p} = dp_x dp_y dp_z,\ p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, \beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$)
In onderdelen (a) t/m (f) beschouwen we het geval $\omega = 0$; dan hebben we te maken met een gas van N vrije, onafhankelijke, niet-onderscheidbare deeltjes.

(a) Laat via een berekening zien dat:

$$Z_1(\beta, V) = V \left(\frac{2\pi m}{h^2 \beta} \right)^{\frac{3}{2}}$$

(b) Geef een benaderde uitdrukking voor de partitiefunctie $Z(\beta, V, N)$ van N deeltjes door gebruik te maken van Stirling's benadering (in zijn eenvoudigste vorm).

(c) Bereken een expliciete uitdrukking voor de entropie $S(T, V, N)$ via het resultaat van onderdeel (b).

(d) Waaraan zie je dat de entropie van het ideale gas *extensief* is?

(e) Leid af hoe je de druk P berekend uit de (Helmholtz) vrije energie F. Gegeven is de totale differentiaal van de interne energie U: $dU = T\,dS - P\,dV + \mu\,dN$.

(f) Laat via een berekening zien dat de ideale gaswet gevonden wordt uit de uitdrukking voor $Z(\beta, V, N)$ uit (b).

(g) Bereken $Z_1(\beta, V)$ voor een klassieke, harmonische oscillator (d.w.z. voor ω ongelijk aan nul) in een zeer groot (*oneindig*) volume V.

(h) Bereken de soortelijke warmte C_V voor een ideaal gas van N klassieke, harmonische oscillatoren (in een zeer groot volume).