TENTAMEN STATISTICAL PHYSICS 1 5 januari 2017
(College Dr. P.J.H. Denteneer, najaar 2016) 14:00-17:00 uur

Schrijf op elk vel dat je inlevert NAAM, VOORLETTERS en STUDENTNUMMER.
Het tentamen bestaat uit 3 opgaven. Lees de opgaven zorgvuldig!
Begin de uitwerking van elke opgave op een nieuwe pagina.
Geef bij berekeningen duidelijk de verschillende stappen weer.
Met elk onderdeel is 3 punten te verdienen, behalve onderdelen **2(d)** en **3(d)** waarmee 4 punten verdiend kan worden.
Bedenk dat gedeeltelijk correcte antwoorden ook punten op kunnen leveren.

1) Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen of opdrachten (er wordt in deze opgave niet om uitgebreide argumentaties of berekeningen gevraagd):

(a) Welke thermodynamische grootheden zijn gelijk voor twee systemen in *thermisch evenwicht* wanneer die systemen onderling energie kunnen uitwisselen (maar niet met hun verdere omgeving) en een gemeenschappelijk volume delen?

(b) Noem twee aspecten of eigenschappen van de *Maxwell-snelheidsverdeling* $P(v)$ die van de temperatuur afhangen (v is de lengte van de snelheidsvector $\vec{v}$). Geef ook aan of ze groter of kleiner worden bij stijgende temperatuur.

(c) Hoeveel *vrijheidsgraden* heeft een gas van N kooldioxidemoleculen (CO_2)?

(d) Beargumenteer wat de polymeerlengte zal zijn voor zeer hoge temperatuur in het model waarin het polymeer onder constante spanning staat en de monomeren waaruit het polymeer is opgebouwd ofwel kort ofwel lang zijn?

(e) Teken een grafiek van de *entropie* S als functie van temperatuur T voor een systeem van wisselwerkende Ising spins (zonder extern magneetveld).

2) We beschouwen wisselwerkende Ising spins s_i (die de waarden +1 en -1 kunnen aannemen) op de hoekpunten van kleine geometrische objecten. De wisselwerking kan ferromagnetisch (spins bij voorkeur in dezelfde richting) of antiferromagnetisch (spins bij voorkeur in tegengestelde richting) zijn. Het spinsysteem is in contact met een warmtebad met temperatuur T.

(I) Beschouw eerst 3 Ising spins op een gelijkbenige driehoek met *antiferromagnetische* interactie. De totale energie wordt dan gegeven door:

$$E(s_1, s_2, s_3) = J(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) \quad ,$$

met J een (positieve) interactieconstante.

(a) Wat zijn de mogelijke energiewaarden E_n ($n = 1, 2, \ldots$) die optreden en hoe *ontaard* zijn ze (d.w.z. hoeveel microtoestanden hebben deze energie; noem dit aantal g_n)? Orden de E_n naar opklimmende waarde.

Z.O.Z.

(b) Bereken de kanonieke toestandssom Z voor het spinsysteem op de driehoek (als functie van $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$ en J).

(c) Bereken de gemiddelde energie $\langle E \rangle$ als functie van β en J.

(d) Bereken de entropie S en bespreek het resultaat in de hoge- en lagetemperatuurlimiet.

(II) Beschouw nu 4 Ising spins op een vierkant met *ferromagnetische* interactie tussen naaste buren. We noemen de (positieve) interactieconstante opnieuw J.

(e) Schrijf de uitdrukking op voor de energie E van het spinsysteem op het vierkant Wat is de laagste energiewaarde E_0 die kan optreden? Wat is de ontaarding g_0?

(f) Vergelijk de ontaardingen van de laagste energietoestanden voor de driehoek in (a) en het vierkant in (e) en geef een reden voor de verschillende mate van ontaarding.

3) We beschouwen een ideaal gas van N identieke, onafhankelijke, klassieke harmonische oscillatoren in thermisch evenwicht bij temperatuur T, die kunnen bewegen (als moleculen) in een volume V. De partitiefunctie van 1 oscillator (met hoekfrequentie ω en massa m) wordt gegeven door:

$$Z_1(\beta, V) = \frac{1}{h^3} \int_V d^3\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{p}\; e^{-\beta H_1(\vec{r},\vec{p})} \quad ,$$

met

$$H_1(\vec{r},\vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2} m\omega^2 r^2 \quad .$$

De integraties zijn over het hele volume V voor de positie $\vec{r}$ en van $-\infty$ tot ∞ voor elk van de componenten van de impulsvector $\vec{p}$.
($d^3\vec{r} = dxdydz,\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2,\ \ d^3\vec{p} = dp_x dp_y dp_z,\ p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, \beta = 1/(k_B T)$)

(a) Geef een formule voor de partitiefunctie Z_N van dit systeem als integraal over de 6N-dimensionale faseruimte van het gas.
(*De integraal hoeft niet berekend te worden*)

(b) Wat is de betekenis van h in de (klassieke, d.w.z. niet-quantummechanische) formules voor Z_1 en Z_N?

(c) Bereken Z_N. Neem in onderdelen (c) t/m (e) aan dat het volume V zeer groot (oneindig) is.

(d) Bereken de gemiddelde kinetische energie $\langle E_{\text{kin}} \rangle$ en de gemiddelde potentiële energie $\langle E_{\text{pot}} \rangle$ van het gas.

(e) Bereken (of bepaal anderszins) de warmtecapaciteit C_V van het gas.