Opleiding Natuurkunde en Sterrenkunde
Universiteit Leiden

Uitwerking Tentamen Speciale Relativiteitstheorie

21 oktober 2002

Opgave 1.

a. Stelsel S' beweegt mee met deeltje, dus deeltje is in rust in S' op positie $x' = 0$. Tijdstip van verval in eigen stelsel S' is $t' = T_0$.

b. Positie van verval in S volgt uit inverse Lorentz-transformatie $x = \gamma(x' + ut') = \gamma u T_0$.

c. Tijdstip van verval in S volgt uit inverse Lorentz-transformatie $t = \gamma(t' + ux'/c^2) = \gamma T_0$.

d. Als $x = \gamma u T_0 = cT_0$, dan moet gelden $c = u\gamma = u/\sqrt{1 - u^2/c^2}$, ofwel $u = c/\sqrt{2}$. De impuls van het deeltje is dan $p = m\gamma u = mc$.

Opgave 2.

a. Kies S als stelsel van de aarde, en S' meereizend met R_1, dus $u = 4c/5$. Dan is $v = -3c/5$ de snelheid van R_2 in S. De snelheid van R_2 ten opzichte van R_1 is dan de snelheid v' in S', gegeven door $v' = (v - u)/(1 - vu/c^2)$. Invullen geeft $v' = -35c/37$. De snelheid van R_1 ten opzichte van R_2 is dan $35c/37$.

b. R_1 verwijdert zich met snelheid $4c/5$ van de Aarde, en signaal dat hij na een jaar uitzendt komt dus aan op Aarde na $k = \sqrt{(1 + 4/5)/(1 - 4/5)}$ jaar, dus 3 jaar. Voor R_2 is de snelheid van verwijdering $3c/5$, dus zijn bericht wordt op Aarde ontvangen na $k = \sqrt{(1 + 3/5)/(1 - 3/5)} = 2$ jaar.

c. R_1 en R_2 verwijderen zich met snelheid $35c/37$ van elkaar, dus daarvoor is de Dopplerfactor $k = \sqrt{(1 + 35/37)/(1 - 35/37)} = 6$. Ze ontvangen elkaars berichten dus na 6 jaar. [Opmerking: Deze k-factor is niet toevallig het product van de k-factoren uit b.]

d. Aankomst van het bericht van R_2 bij R_1 heeft in S' (het stelsel van R_1) de coördinaten $x' = 0$ en $t' = 6$ (afstanden in lichtjaren, tijden in jaren). Plaats x en tijd t in Aardestelsel S volgen dan uit (inverse) Lorentztransformatie met $u = 4c/5$, dus $\gamma = 5/3$. Plaats $x = \gamma(x' + ut') = 8$ lichtjaar, tijd $t = \gamma(t' + ux'/c^2) = 10$ jaar.

e. Kies nu derde stelsel S'' dat meereist met R_2. Voor dit stelsel speelt de snelheid $-3c/5$ de rol van u, zodat $\gamma = 5/4$. Aankomst van het bericht van R_1 bij R_1 heeft de coördinaten $x'' = 0$, en $t'' = 6$. Uit (inverse) Lorentztransformatie volgen dan de coördinaten in het stelsel S van de Aarde: $x = \gamma(x'' + ut'') = -4,5$ lichtjaar, $t = \gamma(t'' + ux''/c^2) = 7,5$ jaar.

Opgave 3.

a. Behoud van impuls geeft vergelijking $M_0\gamma u = E_1/c$. Daaruit volgt dat $E_1 = M_0\gamma uc$.

b. Behoud van energie geeft bovendien de vergelijking $M_0\gamma c^2 = M_1 c^2 + E_1$. Invullen van resultaat voor E_1 en oplossen voor M_1 geeft dan $M_1 = M_0\gamma(1 - u/c) = M_0\sqrt{(1 - u/c)/(1 + u/c)}$.

c. Bij tweede flits vinden we voor energie- en impulsbehoud de vergelijkingen $M_1 c^2 = M_2\gamma c^2 + E_2$ en
$0 = M_2\gamma u - E_2/c$ (bedenk dat de impuls van de flits nu negatief is). Door eliminatie van E_2 vinden we

$$M_2 = M_1 \frac{1}{\gamma(1 + u/c)} = M_1\sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}} = M_0 \frac{1 - u/c}{1 + u/c} \, .$$

Voor de energie van de tweede flits vinden we daarmee

$$E_2 = M_2\gamma uc = M_0\gamma uc \frac{1 - u/c}{1 + u/c} \, .$$

d. Als $M_1/M_0 = 1/3 = \sqrt{(1 - u/c)/(1 + u/c)}$, dan geldt $u = 4c/5$.

e. In dat geval geldt dat $M_2/M_0 = (1 - u/c)/(1 + u/c) = 1/9$.