Opleidingen Natuurkunde en Sterrenkunde
Universiteit Leiden

Uitwerking Tentamen Speciale Relativiteitstheorie

3 november 2003

Opgave 1.

a. Signaal bereikt waarnemer als de afgelegde weg van het signaal $v(t_2-T)$ gelijk is aan de afgelegde weg van de waarnemer ut_2. Dus $t_2 = vT/(v-u)$, $x_2 = ut_2 = uvT/(v-u)$.

b. Uit Lorentztransformatie volgt (met $\gamma = \gamma(u)$)

$$t_2' = \gamma(t_2 - ux_2/c^2) = \frac{vT}{\gamma(v-u)} ,$$

(klopt met $t_2' = t_2/\gamma$, volgens tijddilatatie). Dus

$$K \equiv t_2'/T = \frac{v}{\gamma(v-u)} .$$

c. Bij $v = c$ geeft dit $K = \sqrt{1-\beta^2}/(1-\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$.

Opgave 2.

a. $x_1' = x_3' = x_A' = 0$ en $x_2' = x_B' = L$. Tijden $t_1' = T$, $t_2' = T + L/v_0$ en $t_3' = T + 2L/v_0$ volgen uit gegevens, met looptijd (in S') L/v_0 voor bal op heen- en terugreis.

b. Uit Lorentztransformatie $x = \gamma(x' + ut')$ en $t = \gamma(t' + ux'/c^2)$ (met $\gamma = \gamma(u)$) volgt dan na invullen $x_1 = \gamma uT$, $t_1 = \gamma T$,
$x_2 = \gamma[uT + (1 + u/v_0)L]$, $t_2 = \gamma[T + (L/v_0)(1 + uv_0/c^2)]$,
$x_3 = \gamma(uT + 2uL/v_0)$, $t_3 = \gamma(T + 2L/v_0)$.

c. Duur heenreis is $t_2 - t_1 = (\gamma L/v_0)(1 + uv_0/c^2)$, duur terugreis is $t_3 - t_2 = (\gamma L/v_0)(1 - uv_0/c^2)$. Heenreis duurt dus een tijd $(2\gamma uL/c^2)$ langer.

d. Reisduur in S' is $t'_3 - t'_1 = 2L/v_0$. Reisduur in S is $t_3 - t_1 = 2\gamma L/v_0$. Dit is factor γ langer. Klopt met tijddilatatie: bedenk dat $t'_3 - t'_1$ het tijdverloop is op de klok van A, die stilstaat in S'.

e. Lengte heenreis in S: $x_2 - x_1 = \gamma L(1 + u/v_0)$. Lengte terugreis in S: $x_3 - x_2 = \gamma L(-1 + u/v_0)$ (aangenomen dat $v_0 > u$, anders wordt de laatste uitdrukking het tegengestelde).

f.
$$v_{heen} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{u + v_0}{1 + uv_0/c^2}\ ,\ v_{terug} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{u - v_0}{1 - uv_0/c^2}\ .$$

Dit klopt met optelregel. (Uiteraard mag u ook de optelregel gebruiken om deze resultaten te verkrijgen.)

Opgave 3.

a. Impulsbehoud geeft $0 = p_1 - E/c$, dus $p_1 = E/c$. Energiebehoud geeft $M_0c^2 = E_1 + E$, zodat $E_1 = M_0c^2 - E$.

b. Deeltje met impuls p_1 en energie E_1 voldoet aan relatie tussen energie, impuls en massa
$M_1^2c^4 = E_1^2 - c^2p_1^2 = (M_0c^2 - E)^2 - E^2 = M_0^2c^4 - 2EM_0c^2$. Dus $M_1 = \sqrt{M_0^2 - 2EM_0/c^2}$.

c. De resterende massa M_1 moet positief zijn, dus $M_0^2 - 2EM_0/c^2 > 0$, ofwel $E < M_0c^2/2$.

d. De snelheid v_1 hangt samen met de impuls als $p_1 = M_1\gamma(v_1)v_1 = E/c$. Na kwadrateren en oplossen van v_1^2 vinden we

$$\frac{v_1^2}{c^2} = \frac{E^2/c^4}{(M_0 - E/c^2)^2} \quad \text{ofwel} \quad v_1 = c\frac{E}{M_0c^2 - E}$$

(Deze snelheid nadert naar c als E stijgt naar $M_0c^2/2$.)