Opleidingen Natuurkunde en Sterrenkunde
Universiteit Leiden

Uitwerking Tentamen Speciale Relativiteitstheorie

8 november 2004

Opgave 1

a. Om x_A te vinden als functie van t bij gegeven $x'_A = L$ gebruiken we de Lorentz-transformatie $x'_A = \gamma(x_A - ut)$, zodat $x_A = ut + L/\gamma$. Om x'_B te vinden als functie van t' bij gegeven $x_B = L$ gebruiken we de inverse Lorentz-transformatie $x_B = \gamma(x'_B + ut')$, zodat $x'_B = -ut' + L/\gamma$.

b. A geeft de tijd t' van S' weer. Plaats en tijd in S van de gebeurtenis dat $t' = 0$ op de plaats $x' = x'_A = L$ worden gegeven door de inverse Lorentz-transformatie $x = \gamma(x' + ut') = \gamma L$, en $t = \gamma(t' + ux'/c^2) = \gamma uL/c^2$.

c. B geeft de tijd t van S weer. Plaats en tijd in S' van de gebeurtenis dat $t = 0$ op de plaats $x = x_B = L$ worden gegeven door de Lorentz-transformatie $x' = \gamma(x - ut) = \gamma L$, en $t' = \gamma(t - ux/c^2) = -\gamma uL/c^2$.

d. Bij passage van de klokken geldt dat $x_A = x_B = L$ en ook dat $x'_B = x'_A = L$. We moeten dus de tijd t' (aangegeven door klok A), en de tijd t (aangegeven door klok B) vinden van de gebeurtenis waarvoor $x = x' = L$. Uit $x = \gamma(x' + ut')$ volgt direct dat $t' = (L/u)(1/\gamma - 1)$. Uit $x' = \gamma(x - ut)$ volgt dat $t = (L/u)(1 - 1/\gamma)$. Bij $u = 4c/5$ geldt dat $\gamma = 5/3$. Als afstand in lichturen wordt gemeten, en tijd in uren, dan is $c = 1$ (lichtuur per uur). $L = 1$ geeft dan $t' = -1/2$ uur voor de tijd op klok A, en $t = 1/2$ uur voor de tijd op klok B.

Opgave 2.

a. Voor gebeurtenis 1 is $x'_1 = 0$, en $t'_1 = T$. Reistijd van beide kogels in S' bedraagt $L/(2w)$, zodat gebeurtenissen 2 en 3 bepaald worden door $x'_2 = -L/2$, $t'_2 = T + L/(2w)$, en $x'_3 = L/2$, $t'_3 = T + L/(2w)$.

b. Plaats en tijd van de drie gebeurtenissen in S volgen direct uit inverse Lorentztransformatie. Dat geeft
$x_1 = \gamma u T$, $t_1 = \gamma T$,
$x_2 = \gamma[uT + (L/2)(-1 + u/w)]$, $t_2 = \gamma[T + (L/2w)(1 - uw/c^2)]$,
$x_3 = \gamma[uT + (L/2)(1 + u/w)]$, $t_3 = \gamma[T + (L/2w)(1 + uw/c^2)]$.

c. De achterwaartse kogel heeft in S de vluchttijd $t_2 - t_1 = (\gamma L/2w)(1 - uw/c^2)$, en de voorwaartse kogel heeft vluchttijd $t_3 - t_1 = (\gamma L/2w)(1 + uw/c^2)$. Gezien vanuit S reist de voorwaartse kogel dus een tijd $\gamma Lu/c^2$ langer, en komt even veel later aan (terwijl de aankomsten gezien vanuit S' gelijktijdig zijn).

d. Voor de achterwaartse kogel is de afgelegde weg $x_2 - x_1 = (\gamma L/2)(u/w - 1)$, en voor de voorwaartse $x_3 - x_1 = (\gamma L/2)(u/w + 1)$.

e. De achterwaartse snelheid bedraagt

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{u - w}{1 - \frac{uw}{c^2}} ,$$

en de voorwaartse snelheid is

$$\frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} = \frac{u + w}{1 + \frac{uw}{c^2}} .$$

Dit stemt (natuurlijk) overeen met de bekende resultaten voor het optellen van snelheden.

Opgave 3.

a. De totale energie is de som van de energieën van de flits en het deeltje, dus $E = E_1 + M_0 c^2$. De totale impuls is de som van de impulsen van de flits en het deeltje, dus $P = E_1/c$.

b. Het ruststelsel is gedefinieerd door de eis dat $P' = 0$, waarbij de Lorentztransformatie $P' = \gamma(u)(P - uE/c^2)$ geldt, met u de snelheid van het ruststelsel. Daaruit volgt dat

$$u = \frac{c^2 P}{E} = c\frac{E_1}{E_1 + M_0 c^2} .$$

c. Bij absorptie zijn impuls P en en energie E behouden. De massa M_1 van het deeltje na absorptie voldoet aan $M_1^2 c^4 = E^2 - c^2 P^2$. Invullen van de onder a. gevonden waarden geeft dan $M_1 = \sqrt{M_0^2 + 2M_0 E_1/c^2}$.

d. Als we de snelheid van het deeltje na absorptie schrijven als v_1, dan geldt ook dat $P = M_1\gamma(v_1)v_1$, en $E = M_1\gamma(v_1)c^2$. De waarde van v_1 vinden we direct uit P/E, met als resultaat dat $v_1 = c^2 P/E$. Dat betekent volgens b. dat $v_1 = u$, zodat de snelheid van het deeltje na absorptie gelijk is aan de snelheid van het ruststelsel voor absorptie. Dat is natuurlijk geen verrassing: na absorptie is er alleen nog maar het deeltje, dat vanzelfsprekend stilstaat in het ruststelsel.

e. Na 2 absorpties is de impuls $P = 2E_1/c$, en de energie $E = 2E_1 + M_0 c^2$, en dat geeft dezelfde impuls en energie als na de absorptie van een enkele flits met energie $2E_1$. In beide gevallen zijn de massa en snelheid

$$M_2 = \sqrt{M_0^2 + \frac{4M_0 E_1}{c^2}}\ ,\ v_2 = c\frac{2E_1}{2E_1 + M_0 c^2}\ .$$