

Uitwerking Tentamen Speciale Relativiteitstheorie

7 november 2005

Opgave 1

- Het deeltje bevindt zich in de oorsprong van S' , zodat op alle tijden zijn positie gegeven is door $x' = 0$. Het deeltje vervalt in het stelsel S' nadat het een tijd T_0 heeft geleefd, zodat het vervalstijdstip gelijk is aan $t' = T_0$.
- De (omgekeerde) Lorentztransformatie geeft voor de plaats x van verval $x = \gamma(x' + ut') = \gamma u T_0$.
- De (omgekeerde) Lorentztransformatie geeft voor de tijd t van verval $t = \gamma(t' + ux'/c^2) = \gamma T_0$. Omdat $\gamma > 1$ is deze levensduur in S groter dan T_0 .
- Als de afgelegde weg in S gelijk is aan $\gamma u T_0 = c T_0$, dan is $\gamma u/c = 1$. Kwadrateren geeft dan $u^2/c^2 = 1 - u^2/c^2$, zodat $u^2 = c^2/2$, ofwel $u = c/\sqrt{2}$.
- De impuls van het deeltje is dan $p = m\gamma u = mc$.

Opgave 2.

- A reist de afstand ut_2 , en B reist de afstand $2u(t_2 - T)$. Deze afstanden zijn gelijk als A door B wordt ingehaald.
- Uit deze gelijkheid volgt onmiddellijk dat $t_2 = 2T$, zodat de afgelegde afstand van beide reizigers gelijk is aan $ut_2 = 2uT$.
- Uit de Lorentztransformatie $x'_2 = \gamma(x_2 - ut_2)$ volgt dan $x'_2 = 0$. (Dat klopt met het feit dat A zich in de oorsprong van S' bevindt.) Uit de Lorentztransformatie $t'_2 = \gamma(t_2 - ux_2/c^2)$ volgt dat $t'_2 = 2\gamma T(1 - u^2/c^2) = 2T/\gamma$.

- d. De onder c. gevonden tijd $2T/\gamma$ is de reistijd van A tot de ontmoeting met B . Dat is dus tevens de verlopen eigentijd van A .
- e. B reist in S met snelheid $v = 2u$, zodat zijn snelheid in S' gegeven is door

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \frac{u}{1 - \frac{2u^2}{c^2}} .$$

Dit is groter dan u

- f. Gezien vanuit S' staat A stil, terwijl B eerst (met snelheid $-u$) achterwaarts beweegt, en dan (met snelheid v') weer terugreist naar A in de oorsprong van S' . Gezien vanuit S' maakt B dus een rondreis, terwijl A stilstaat. Dus de verlopen eigentijd van B is korter dan die van A .
 [De verlopen eigentijd van B is gelijk aan $T(1 + \gamma^{-1}(2u))$, hetgeen inderdaad kleiner is dan de verlopen eigentijd $2T/\gamma(u)$ van A .]

Opgave 3.

- a. De totale energie is de som van de energieën van de flits (E_1) en het deeltje (M_1c^2), dus $E = E_1 + M_1c^2$. De totale impuls is de som van de impulsen van de flits (E_1/c) en het deeltje (0), dus $P = E_1/c$.
- b. De snelheid u van het ruststelsel is

$$u = \frac{c^2P}{E} = c \frac{E_1}{E_1 + M_1c^2} .$$

- c. De rustenergie van het systeem is
 $E_0 = \sqrt{E^2 - c^2P^2} = \sqrt{M_1^2c^4 + 2E_1M_1c^2}$.
- d. De snelheid van het schip na absorptie is hetzelfde als de snelheid van het ruststelsel van het systeem, die immers bij de absorptie niet verandert. Dus de snelheid van het schip is $v = u$, met u gevonden onder b.
- e. De massa M_2 van het schip is de rustenergie van het schip na absorptie, gedeeld door c^2 . De rustenergie van het systeem verandert niet bij de absorptie, zodat $M_2 = E_0/c^2 = \sqrt{M_1^2 + 2M_1E_1/c^2}$.