Uitwerking Tentamen Speciale Relativiteitstheorie

5 november 2007

Opgave 1

a. Het deeltje bevindt zich in de oorsprong van S', zodat op alle tijden zijn positie gegeven is door $x' = 0$. Het deeltje vervalt in het stelsel S' nadat het een tijd T_0 heeft geleefd, zodat het vervalstijdstip gelijk is aan $t' = T_0$.

b. De (omgekeerde) Lorentztransformatie geeft voor de plaats x van verval $x = \gamma(x' + ut') = \gamma u T_0$.

c. De (omgekeerde) Lorentztransformatie geeft voor de tijd t van verval $t = \gamma(t' + ux'/c^2) = \gamma T_0$. Omdat $\gamma > 1$ is deze levensduur in S groter dan T_0.

d. Als de afgelegde weg in S gelijk is aan $\gamma u T_0 = cT_0$, dan is $\gamma u/c = 1$. Kwadrateren geeft dan $u^2/c^2 = 1 - u^2/c^2$, zodat $u^2 = c^2/2$, ofwel $u = c/\sqrt{2}$.

e. De impuls van het deeltje is dan $p = m\gamma u = mc$.

Opgave 2.

a. P start in $x = 0$ op $t = 0$ met snelheid u. Dus de tijdafhankelijke positie in S is gegeven door $x_P(t) = ut$. Q start in $x = L$ op $t = 0$ met snelheid $-u$. Dus de tijdafhankelijke positie in S is gegeven door $x_Q(t) = L - ut$.

b. Start van Q is gebeurtenis 1, dus $x_1 = L$, $t_1 = 0$. Ontmoeting van P en Q is gebeurtenis 2. Dan geldt $x_P(t_2) = x_Q(t_2)$, ofwel $ut_2 = L - ut_2$, zodat $t_2 = L/(2u)$. De plaats van gebeurtenis 2 is dus $x_2 = L/2$.

c. De reistijd van Q in S is $\Delta t = t_2 - t_1 = L/(2u)$. De door Q afgelegde weg in S is $\Delta x = x_2 - x_1 = -L/2$ (negatief, omdat Q in negatieve richting reisde). Uit de Lorentztransformatie voor Δt volgt dan voor de reistijd van Q in S' dat

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x) = \gamma\left(\frac{L}{2u} - \frac{u}{c^2}(-\frac{L}{2})\right) = \frac{\gamma L}{2u}\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right) .$$

d. Uit de Lorentztransformatie voor Δx volgt voor de door Q afgelegde weg in S' dat

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t) = \gamma\left(-\frac{L}{2} - u(-\frac{L}{2u})\right) = -\gamma L \ .$$

(Dit is negatief, omdat Q ook in S' in negatieve richting reisde. Afstand is dus γL.)

e. Q reisde in S' met snelheid

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{-\gamma L}{\frac{\gamma L}{2u}\left(1+\frac{u^2}{c^2}\right)} = \frac{-2u}{1+\frac{u^2}{c^2}} \ .$$

(Dit volgt ook uit de optelregel voor snelheden (verg (7) uit de Syllabus) bij $v_x = -u$.)

f. De reistijd van P in S is $t_2 = L/(2u)$, en de door P afgelegde weg in S is $x_2 = L/2$. Voor de reistijd van P in S' geeft de Lorentztransformatie dan $t_2' = \gamma(t_2 - ux_2/c^2) = L/(2u\gamma)$. (Deze uitdrukking volgt ook uit het feit dat dit de verlopen eigentijd van P is.)

g. De reistijd van Q in zijn eigen stelsel is hetzelfde als de reistijd van P in zijn eigen stelsel, omdat beide in S reizen met dezelfde snelheid (op een teken na) gedurende eenzelfde tijd ($L/(2u)$).

Opgave 3.

a. De totale energie is de som van de energieën van de flits (E_1) en het deeltje (M_0c^2), dus $E = E_1 + M_0c^2$. De totale impuls is de som van de impulsen van de flits (E_1/c) en het deeltje (0), dus $P = E_1/c$.

b. De snelheid u van het ruststelsel is

$$u = \frac{c^2P}{E} = c\frac{E_1}{E_1 + M_0c^2} \ .$$

c. Bij absorptie blijven de energie en de impuls behouden. De massa van het deeltje na absorptie is de rustenergie E_0 gedeeld door c^2. Dus $M_1 = E_0/c^2 = \sqrt{E^2 - c^2P^2}/c^2 = \sqrt{M_0^2 + 2E_1M_0/c^2}$.

d. Na de absorptie is de impuls gelijk aan $P = \gamma(v) M_1 v$, en de energie $E = \gamma(v) M_1 c^2$. Dit geeft $P/E = v/c^2$, zodat $v = u$ gelijk is aan de snelheid van het ruststelsel, gevonden onder b. (Dat moet ook, omdat het ruststelsel bij de absorptie niet verandert.)

e. Na de tweede absorptie is de impuls $2E_1/c$, en de energie $2E_1 + M_0 c^2$. Deze waarden gelden ook na absorptie van een flits met de dubbele energie. Dus zijn de massa en de snelheid na twee absorpties van energie E_1 hetzelfde als na één absorptie van energie $2E_1$:
$M_2 = \sqrt{M_0^2 + 4E_1 M_0/c^2}$, en $v_2 = 2cE_1/(2E_1 + M_0 c^2)$.