

Schrijf op elk vel dat je inlevert NAAM, VOORLETTERS en STUDENTNUMMER.

Het tentamen bestaat uit 3 opgaven. Lees de opgaven zorgvuldig!

Begin de uitwerking van elke opgave op een nieuwe pagina.

Geef bij berekeningen duidelijk de verschillende stappen weer.

Met elk onderdeel is 3 punten te verdienen, behalve onderdeel **3(c)**, waarmee 2 punten verdiend kan worden.

Bedenk dat gedeeltelijk correcte antwoorden ook punten op kunnen leveren.

- 1) Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen of opdrachten (er wordt in deze opgave niet om uitgebreide argumentaties of berekeningen gevraagd):
 - (a) Geef de formule die de *druk* definiëert in de statistische fysica en benoem de symbolen die je gebruikt.
 - (b) Welke *thermodynamische functie* heeft als *natuurlijke variabelen* T , P en N ? Wordt de waarde van deze functie groter of kleiner of blijft die gelijk wanneer een systeem naar thermodynamisch evenwicht gaat?
 - (c) Hoeveel *vrijheidsgraden* heeft een watermolecuul (H_2O)?
 - (d) Beredeneer m.b.v. je kennis van de statistische fysica dat rubber krimpt wanneer het wordt opgewarmd.
 - (e) Teken een grafiek van de *magnetisatie* M als functie van temperatuur T voor een systeem van wisselwerkende magnetische momenten (zonder magneetveld).

- 2) In een perfect atomair kristal zit op elke roosterpositie een atoom. Een dergelijke configuratie is alleen stabiel bij temperatuur $T = 0$. Bij hogere temperatuur zullen er zogenaamde *defecten* in het kristal optreden. Een veel voorkomend type defect is dat een atoom een roosterpositie verlaat en een lege plek achterlaat. Een dergelijk defect heet een *vacature*. Neem aan dat het perfecte kristal N roosterposities heeft en een totale energie E gelijk aan nul heeft. Noem n het aantal vacatures bij temperatuur T . Noem ε de vormingsenergie van een vacature (d.w.z. de energie nodig om één vacature te creëren) en neem aan dat die constant is, ongeacht hoeveel vacatures er al zijn.
 - (a) Hoeveel configuraties met n vacatures zijn er?
 - (b) Leid een uitdrukking af voor de entropie S als functie van n en N , gebruikmakend van (de eenvoudigste vorm van) Stirlings benadering.
 - (c) Bereken de temperatuur $T(n)$ die hoort bij een evenwichtssituatie met n vacatures.
 - (d) Bereken de *concentratie* van vacatures n/N bij temperatuur T .

Z.O.Z.

- (e) Een echt kristal heeft typisch een lage concentratie van vacatures. Is zo'n realistisch kristal een lage- of een hoge-temperatuursituatie van het statistisch-fysisch probleem? Geef argumenten voor je antwoord.
- (f) In het bovenstaande is er vanuit gegaan dat de *microkanonieke* verdeling van toepassing is. Beschrijf een strategie of werkwijze hoe je de entropie S zou berekenen in het geval dat je met de *kanonieke* verdeling werkt.
N.B. Er wordt niet gevraagd de berekening van S uit te voeren.
 (Indien nodig kun je o.a. gebruik maken van: $dU = TdS - PdV + \mu dN$)

3) We beschouwen een vrij-scharnierende keten (*freely jointed chain*) als model voor een flexibel polymeer in drie ruimtelijke dimensies. De keten bestaat uit N verbindingsstukjes (*links*) met lengte a , die allemaal in elke richting kunnen wijzen, onafhankelijk van elkaar. Neem aan dat er bij gegeven temperatuur T getrokken wordt aan de keten met een trekkracht $-f$ aan het begin en $+f$ aan het einde, beiden in de z -richting. De orientatie van link i wordt dan gegeven door twee hoeken: θ_i (hoek met de z -richting) en ϕ_i (een hoek in het vlak loodrecht op de z -richting).

- (a) Beargumenteer dat de lengte van de keten gegeven wordt door:

$$d = \sum_{i=1}^N a \cos(\theta_i) \quad ,$$

en dat de Hamiltoniaan wordt gegeven door: $H = -fd$

- (b) Laat door middel van een berekening zien dat de partitiefunctie Z van een vrij-scharnierende keten wordt gegeven door:

$$Z = \left(\frac{4\pi}{\beta f a} \right)^N \sinh^N(\beta f a)$$

- (c) Wat betekent het feit dat de temperatuur T gegeven is voor de totale energie E ?
(Er wordt om een kwalitatief antwoord gevraagd, geen berekening)
- (d) Bereken de relatie tussen de gemiddelde lengte $\langle d \rangle$ van de keten en de trekkracht f , de zgn. kracht-uitrekking (*force-extension*) relatie.
Hint: Bereken eerst de gemiddelde energie $\langle E \rangle$.
- (e) Benader de lengte van de keten bij zeer lage temperatuur. Geef commentaar op je resultaat.
- (f) Benader de lengte van de keten bij hoge temperatuur en bespreek je resultaat.

Gegeven: $\coth x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x + \dots$ voor $|x| \ll 1$.