**Uitwerking Tussentoets Statistische Fysica I**
**Maandag 29 oktober 2012**

OPGAVE 1: *Weten en kunnen*

a) Het getal van Avogadro bedraagt $6.022\times 10^{23}$.

b) De gevraagde partitiefunctie kan worden geschreven als $Z=\sum_i \exp\left(-E_i/k_BT\right)$.

c) Bij de canonieke verdeling wordt de temperatuur van een systeem constant gehouden en mag de totale energie rondom haar gemiddelde fluctueren. Bij de microcanonieke verdeling is het precies andersom: de totale energie ligt vast en de temperatuur vertoont fluctuaties rondom haar gemiddelde.

OPGAVE 2: *Barometrische hoogteverdeling*

a) De totale energie voor het molecuul wordt gegeven door

$$\begin{aligned} E &= K\left(v_x,v_y,v_z\right)+V\left(x,y,z\right) \\ &= m\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}-\frac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &= m\frac{v^2}{2}-\frac{GmM}{r} \quad . \end{aligned}$$

b) De bijbehorende waarschijnlijkheidsdichtheid om het molecuul aan te treffen bij positie $\vec{r}=\left(x,y,z\right)$ met snelheid $\vec{v}=\left(v_x,v_y,v_z\right)$ bij constante temperatuur $T$ vinden we, volgens de canonieke verdeling, als

$$P\left(x,y,z,v_x,v_y,v_z\right)=\frac{1}{Z}\exp\left(\frac{GmM}{rk_BT}-\frac{mv^2}{2k_BT}\right) \quad .$$

De hierin optredende partitiefunctie $Z$ wordt gegeven door de integraal van de exponentiele functie over alle mogelijke waarden van de drie snelheidscomponenten $v_x,v_y,v_z$ en alle posities waarvoor $r>R$.

c) De positie $\vec{r}$ van het molecuul is niet van invloed op de lokale verdeling van de snelheden van het molecuul. Immers, we kunnen de uitdrukking voor de waarschijnlijkheidsdichtheid scheiden in twee factoren:

$$\begin{aligned} P\left(x,y,z,v_x,v_y,v_z\right) &= \frac{1}{Z_r}\exp\left(\frac{GmM}{rk_BT}\right)\frac{1}{Z_v}\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right) \\ &= P\left(x,y,z\right)P\left(v_x,v_y,v_z\right) \quad . \end{aligned}$$

Dit is het product van twee onafhankelijke waarschijnlijkheidsdichtheids-verdelingen, een voor de positie en een voor de snelheid. In de eerste komt de snelheid niet voor, in de tweede zit geen informatie over de positie.

d) Zoals al bij c) beargumenteerd, heeft de positie geen invloed op de snelheidsverdeling en heeft de snelheid geen invloed op de positieverdeling. Hier wordt bovendien nog gevraagd naar ‘overspraak’ tussen de verschillende snelheidscomponenten. Hiervoor kijken we nog eens goed naar de Boltzmannfactor die met de snelheid samenhangt:

$$P(v_x,v_y,v_z)=\frac{1}{Z_v}\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right)=\frac{1}{Z_{vx}}\exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_BT}\right)\frac{1}{Z_{vy}}\exp\left(-\frac{mv_y^2}{2k_BT}\right)\frac{1}{Z_{vz}}\exp\left(-\frac{mv_z^2}{2k_BT}\right)$$

$$=P(v_x)P(v_y)P(v_z)\quad .$$

We zien dus dat op haar beurt de snelheidsverdeling geschreven kan worden als het product van onafhankelijke factoren, namelijk van drie onafhankelijke snelheidsverdelingen, een voor de $x$-component van de snelheid, een voor de $y$-component en een voor de $z$-component.