

Schrijf op elk vel dat je inlevert NAAM, VOORLETTERS en COLLEGEKAARTNUMMER.
Begin elke opgave op een nieuwe pagina.

Het aantal punten dat je met de verschillende opgaven kunt verdienen is als volgt: 1) 25 punten, 2) 30 punten, 3) 25 punten en 4) 20 punten. Bedenk dat ook gedeeltelijk correcte antwoorden punten op kunnen leveren.

1) Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen of opdrachten:

- (a) Welke grootte is in het microkanoniek ensemble in evenwicht extremaal? Is deze grootte dan minimaal of maximaal?
- (b) Wat wordt verstaan onder het begrip “fase-ruimte”? Hoeveel dimensies heeft de fase-ruimte voor een systeem van N zuurstof (O_2) moleculen?
- (c) Teken een kwalitatieve grafiek van de soortelijke warmte C_V van een kristal ten gevolge van roostertrillingen (fononen) als functie van de temperatuur T .
- (d) Beargumenteer of de druk in een ideaal gas van fermionen lager, gelijk aan of hoger is dan in een klassiek ideaal gas (bij dezelfde dichtheid en temperatuur).
- (e) Wat wordt verstaan onder “Bose-Einstein condensatie”?

- 2) (a) Geef een uitdrukking voor de kanonieke toestandssom Z voor het geval dat de energie van een toestand een discrete verzameling van waarden kan aannemen. Definieer de symbolen die je gebruikt.
- (b) Leidt een uitdrukking af voor de gemiddelde kwadratische fluctuatie in de energie, $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$, in termen van Z .
- (c) Beschouw nu een foton mode met hoekfrequentie ω bij temperatuur T . De mode kan bezet zijn met $0, 1, 2, \dots$ fotonen. Wanneer er n fotonen in de mode zitten is de energie van het systeem dus: $E_n = n\hbar\omega$. Bereken het gemiddelde aantal fotonen $\langle n \rangle$ in de foton mode. Gebruik zonedig de formule:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

- (d) Bereken voor de foton mode uit (c) ook de wortel uit de gemiddelde kwadratische fluctuatie (d.w.z. de standaarddeviatie) van het aantal fotonen in de foton mode.
- (e) Vergelijk het antwoord van (d) met dat van (c).

Z.O.Z.

- 3) Een lange polymeerketen onder spanning τ bestaat uit N monomeren die zich elk in een compacte (c; hoog-energetische) of uitgestrekte (g; laag-energetische) toestand kunnen bevinden. De polymeerketen heeft dus 2^N mogelijke toestanden. Neem als totale lengte van de polymeerketen: $L = N_c \ell_c + N_g \ell_g$, waarbij $\ell_g > \ell_c$ en N_c en N_g de aantallen compacte en gestrekte monomeren zijn.
- Bereken de gemiddelde polymeerlengte $\langle L \rangle$ als functie van temperatuur T en spanning τ .
 - Bereken de gemiddelde polymeerlengte $\langle L \rangle$ in de limieten $T \rightarrow 0$ en $T \rightarrow \infty$. Beargumenteer waarom je deze resultaten tevoren had kunnen verwachten.
- 4) We beschouwen een systeem van N_e elektronen op een drie-dimensionaal kubisch rooster met N_p posities (bij temperatuur T) die zich ieder in twee toestanden kunnen bevinden: spin omhoog ($s = +1$) en spin omlaag ($s = -1$). Indien de elektronen kunnen springen tussen naburige roosterposities en verder geen interacties met elkaar hebben, dan wordt hun dispersie-relatie gegeven door:

$$\varepsilon(\vec{k}) = -2t [\cos(k_x a) + \cos(k_y a) + \cos(k_z a)] ,$$

waarin de componenten van de golfvector \vec{k} waarden kunnen aannemen tussen $-\pi/a$ en π/a (a is de afstand tussen naburige atomen en t een constante die verband houdt met de mate van springen van de elektronen).

- De bij $\varepsilon(\vec{k})$ behorende toestandsdichtheid $D(\varepsilon)$ is zodanig dat $D(\varepsilon) = 0$ voor $|\varepsilon| > E_0$. Hoe groot is E_0 ?
- Geef (integraal)uitdrukkingen voor de dichtheid van elektronen n ($=N_e/N_p$) en de magnetisatie per roosterpositie m ($=M/N_p$, met M de totale magnetisatie), aannemende dat de $s = +1$ en $s = -1$ elektronen verschillende chemische potentialen μ_+ en μ_- kunnen hebben. Ter herinnering: De chemische potentiaal hangt met de affiniteit α samen volgens: $\alpha = -\beta\mu$, met $\beta = 1/k_B T$.
- Beschouw nu het geval $T = 0$ en neem aan dat $\mu_+ - \mu_- = mU$ met U een (positieve) constante. Hoe groot moet U minimaal zijn opdat er een magnetisatie ongelijk aan nul kan zijn?
(Aanwijzing: Men zou een analyse kunnen gebruiken gelijkaardig aan de bepaling van de magnetisatie in de gemiddelde-veld-benadering voor het Ising model.)