UITWERKING TENTAMEN
STATISTISCHE EN THERMISCHE FYSICA 1

22 juni 2004

1) (Andere antwoorden zijn niet noodzakelijk incorrect)

   (a) Voor de grafiek zie "Garrod", Fig. 1.1 (p.7). Hoe groter N, des te gepiekter wordt $R(x)$ rondom $x = \frac{1}{2}$. $R(\frac{1}{2}) = 1$ geldt voor alle waarden van N.

   (b) Voor een tekening zie "Garrod", Fig. 3.1 (p.45). De *faseruimte* is tweedimensionaal (met assen: impuls p en positie x). De verzameling punten met constante energie E is de *ellips* gegeven door: $E = p^2/2m + \frac{1}{2}m\omega x^2$.

   (c) (zie "Garrod", sectie 4.6) De *Debije-temperatuur* $T_{\rm D}$ wordt gegeven door: $k_{\rm B}T_{\rm D} = \hbar\omega_{\rm D}$, waarin $\omega_{\rm D}$ de Debije-frequentie, de frequentie waarop de toestandsdichtheid ($D(\omega) \sim \omega^2$ in 3D) wordt afgekapt, d.w.z. de maximale frequentie die je aanneemt dat roostertrillingen kunnen hebben.

   (d) Van de genoemde variabelen hangt de Fermi energie alleen van de *dichtheid* n af.

   (e) (zie "Garrod", sectie 7.16) De functie $D(\omega, T)$ als functie van ω voor een vaste T is evenredig met ω^2 voor kleine ω en evenredig met $\omega^3 \exp(-\hbar\omega/k_{\rm B}T)$ voor grote ω. De grafiek heeft een maximum voor een frequentie $\omega_{\rm max}$ die recht evenredig is met de temperatuur T.

2) (a) We hebben te maken met N *onafhankelijke* (want niet-wisselwerkende) atomen die *onderscheidbaar* zijn (want ze bevinden zich op vaste roosterposities). Er geldt dan: $Z = Z_1^N$. $Z_1 = \sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}$, met (hier) ε_n: energie van toestand n van een enkel atoom. Dus:

$$Z_1 = e^{\beta\varepsilon} + 1 + e^{-\beta\varepsilon} = 1 + 2\cosh(\beta\varepsilon) \quad \longrightarrow \quad Z = [1 + 2\cosh(\beta\varepsilon)]^N$$

   (b)

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} \longrightarrow \langle E \rangle = -N\frac{\partial}{\partial \beta}\log\left[1 + 2\cosh(\beta\varepsilon)\right] \\ \langle E \rangle &= -\frac{2N\varepsilon\sinh(\beta\varepsilon)}{1 + 2\cosh(\beta\varepsilon)} \end{aligned}$$

   (c) Energie van een gegeven toestand: $E = n_1 \cdot \varepsilon + n_0 \cdot 0 + n_{-1} \cdot (-\varepsilon) = \varepsilon\,(n_1 - n_{-1})$. De waarschijnlijkheid P voor die toestand van het systeem is dan:

$$P = \frac{1}{Z}\,e^{-\beta E} = \frac{1}{Z}\,e^{-\beta\varepsilon(n_1 - n_{-1})}$$

(d)

$$\begin{aligned}\langle(\Delta E)^2\rangle &= \frac{\partial^2 \log Z}{\partial\beta^2} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\langle E\rangle = \text{(enig rekenwerk)} = \\ &= 2N\varepsilon^2\,\frac{(\cosh(\beta\varepsilon)+2)}{[1+2\cosh(\beta\varepsilon)]^2} = N\varepsilon^2\,\frac{\left(4+e^{\beta\varepsilon}+e^{-\beta\varepsilon}\right)}{[1+e^{\beta\varepsilon}+e^{-\beta\varepsilon}]^2}\end{aligned}$$

(e) Lage T betekent grote β, hetgeen in dit probleem betekent: $\beta\varepsilon \gg 1$. In dat geval:

$$\langle(\Delta E)^2\rangle \sim N\varepsilon^2\, e^{-\beta\varepsilon} \sim e^{-\varepsilon/k_{\rm B}T}$$

Dit nadert naar nul voor $T \to 0$.
Hoge T betekent kleine β, d.w.z.: $\beta\varepsilon \ll 1$. In dat geval:

$$\langle(\Delta E)^2\rangle \sim N\varepsilon^2\,\frac{(6+\beta^2\varepsilon^2+\ldots)}{(3+\beta^2\varepsilon^2+\ldots)^2}$$

Voor $T \to \infty$ nadert dit naar: $\frac{2}{3}N\varepsilon^2$.

3) Dit is ongeveer *Opgave 33* van werkcollege 8. Voor een uitgebreide uitwerking verwijs ik naar de uitwerking die je ongetwijfeld zelf gemaakt hebt n.a.v. het werkcollege. Ik volsta hier met enkele opmerkingen en resultaten.

(a) Aangezien naar de betekenis wordt gevraagd volstaat het niet om te antwoorden "$g(\varepsilon)$ is de toestandsdichtheid en $f_{\rm FD}(\varepsilon)$ is de Fermi-Dirac verdeling". Het volledige antwoord moet **ook** bevatten dat $g(\varepsilon)d\varepsilon$ het aantal toestanden is met energie tussen ε en $\varepsilon + d\varepsilon$ en $f_{\rm FD}(\varepsilon)$ het gemiddeld aantal deeltjes in (of: de bezettingsgraad van) de één-deeltjes-toestand met energie ε is.

(b) Eind-antwoord:

$$g(\varepsilon) = (2j+1)\frac{mO}{2\pi\hbar^2}\ ,$$

met O het oppervlak van het 2D systeem (bv. $O = L^2$ voor een vierkant met zijde L). $g(\varepsilon)$ is dus onafhankelijk van ε in 2D.

(c) Eind-antwoord: $\gamma = \frac{1}{2}d - 1$
De redenering moet zowel k^d (van volume in golfvector-ruimte voor bol met straal k) als $d\varepsilon/dk$ bevatten.

(d) Te bewijzen via $\psi = \beta PV$ en partiële integratie van de integraal-uitdrukking voor ψ. Een alternatief is de β-afhankelijkheid van ψ eerst buiten de integraal te krijgen (dat kan vanwege het gegevene in (c)) en dan gebruik te maken van: $\langle E\rangle = -\frac{\partial\psi}{\partial\beta}$.

(e) Te bewijzen via partiële integratie van de uitdrukking voor $\langle N\rangle$; men vindt: $\langle N\rangle = PV - X$, met X een integraal-uitdrukking waarvan direct te zien is dat hij positief is.

4) (a) De (genormeerde) waarschijnlijkheid voor een bepaalde toestand (vergelijk Opgave 2(c)) is:

$$P(\theta_1, \phi_1, \ldots, \theta_N, \phi_N) = \frac{1}{Z}\, e^{-\beta V(\theta_1,\phi_1,\ldots,\theta_N,\phi_N)} \ ,$$

dus de uitdrukking voor Z is:

$$Z = \int e^{-\beta V(\theta_1,\phi_1,\ldots,\theta_N,\phi_N)} \prod_{i=1}^{N} \sin(\theta_i) d\theta_i \, d\phi_i = 1 \ .$$

De monomeren zijn onafhankelijk (toestand van een monomeer hangt niet af van die van anderen) en onderscheidbaar (ze blijven in dezelfde volgorde zitten) zodat: $Z = Z_1^N$ met Z_1 de toestandssom van één monomeer:

$$Z_1 = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, e^{\beta F \ell \cos(\theta)} \sin(\theta) = 2\pi \int_{-1}^{1} e^{\beta F \ell x} \, dx = \frac{4\pi \sinh(\beta F \ell)}{\beta F \ell}$$

Eind-antwoord:

$$Z = \left(\frac{4\pi \sinh(\beta F \ell)}{\beta F \ell} \right)^N$$

(b)

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \langle -F\ell \sum_i \cos(\theta_i) \rangle = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} = \\ &= -N \frac{\partial \log Z_1}{\partial \beta} = \ldots = N \left[\frac{1}{\beta} - F\ell \coth(\beta F \ell) \right] \end{aligned}$$

(c) Neem aan: kinetische energie $K = \gamma N k_{\mathrm{B}} T = N\gamma/\beta$. Daaruit volgt:

$$E = K + \langle V \rangle \Longrightarrow \frac{E}{N} = (\gamma + 1)/\beta - F\ell \coth(\beta F \ell)$$

De "slimme" integratie gaat als volgt:

$$dS = \frac{1}{T}\, dE \Longrightarrow S = \int \frac{dE}{T} = \int \frac{\partial E}{\partial T} \frac{dT}{T} = \int \frac{\partial E}{\partial \beta} \beta d\beta \qquad (\star)$$

Om de entropie S te berekenen is het nu een kwestie van de uitdrukking voor E naar β te differentiëren en volgens $(\star)$ te integreren. De integrand bestaat uit twee termen; de eerste levert: $-(\gamma + 1) \log(\beta)$ en de tweede term wordt geïntegreerd via de gegeven primitieve. Het eind-resultaat is:

$$\frac{S}{N} = -(\gamma + 1) \log(\beta) + \log\left(\sinh(\beta F \ell)\right) - \beta F \ell \, \coth(\beta F \ell) \ .$$