

Schrijf op elk vel dat je inlevert NAAM, VOORLETTERS en COLLEGEKAARTNUMMER. Begin elke opgave op een nieuwe pagina.

Het aantal punten dat je met de verschillende opgaven kunt verdienen is als volgt: 1) 25 punten, 2) 30 punten, 3) 25 punten en 4) 20 punten. Bedenk dat ook gedeeltelijk correcte antwoorden punten op kunnen leveren.

1) Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen of opdrachten:

- (a) Men gooit in één keer N munten op; die tonen na neerkomen ofwel *kop* ofwel *mnt*. Schets de grafiek van de functie $R(x) = P(x)/P(\frac{1}{2})$, waarin $P(x)$ de kans is op xN keer *kop*. Hoe verandert de grafiek indien je N groter maakt? (Een berekening wordt niet gevraagd)
- (b) Teken in de *faseruimte* van een harmonische oscillator in één ruimtelijke dimensie de verzameling van punten die de oscillator bij constante energie beschrijft.
- (c) Wat wordt verstaan onder de *Debye-temperatuur*?
- (d) De toestand van een gas wordt gegeven door de druk P , de temperatuur T en de dichtheid n . Van welk van deze grootheden hangt de *Fermi energie* voor een gas van fermionen af?
- (e) Teken een kwalitatieve grafiek van $D(\omega, T)$, de verdeling van energie over frequenties ω voor een *zwarte straler* met temperatuur T .

2) Gegeven een rooster met N verschillende posities die elk bezet zijn met een atoom waarvan de spin S waarden aan kan nemen zo dat de energie van het atoom één van de drie waarden $-\varepsilon$, 0 of ε aanneemt. De atomen hebben geen wisselwerking met elkaar en het systeem heeft temperatuur T .

- (a) Bereken de kanonieke toestandssom Z van het systeem.
- (b) Bereken de gemiddelde energie $\langle E \rangle$.
- (c) Een toestand van het systeem kan gekarakteriseerd worden door de drie getallen n_{-1} , n_0 en n_1 : de aantallen atomen die zich in de drie mogelijke energietoestanden bevinden. Geef een uitdrukking voor de waarschijnlijkheid om het systeem in een bepaalde, gegeven toestand aan te treffen?
- (d) Bereken de gemiddelde kwadratische fluctuatie in de energie,

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle \equiv \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (\log Z) .$$

- (e) Wat is de waarde van $\langle (\Delta E)^2 \rangle$ in de limieten $T \rightarrow 0$ en $T \rightarrow \infty$?

Z.O.Z.

- 3) Voor een ideaal gas van fermionen is de energie van een deeltje: $\varepsilon(\vec{k}) = \hbar^2 k^2 / 2m$ met $k \equiv |\vec{k}|$, de lengte van de golfvector \vec{k} . De volgende formules gelden voor “grand potential”, gemiddeld aantal deeltjes en gemiddelde energie van het gas:

$$\psi = \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) \log [1 + \exp(-\alpha - \beta\varepsilon)] ,$$

$$\langle N \rangle = \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) f_{\text{FD}}(\varepsilon) \quad \text{en} \quad \langle E \rangle = \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon g(\varepsilon) f_{\text{FD}}(\varepsilon).$$

- (a) Omschrijf de betekenis van $g(\varepsilon)$ en $f_{\text{FD}}(\varepsilon)$.
 (b) Bepaal $g(\varepsilon)$ voor een twee-dimensionaal ideaal gas van fermionen met spin j .
 (c) Laat zien dat voor een gas in d dimensies geldt: $g(\varepsilon) = c_d \varepsilon^\gamma$, en bepaal γ .
 (d) Toon aan dat $PV = 2\langle E \rangle / d$ (druk P , volume V).
 (e) Laat zien dat $PV > \langle N \rangle k_B T$. (*de ideale gaswet geldt dus niet*)
- 4) We beschouwen een polymeer dat bestaat uit een aaneenschakeling van N staafvormige monomeren, elk met lengte ℓ . De verbindingen beschouwen we als ideaal flexibel, d.w.z. opeenvolgende monomeren kunnen willekeurige oriëntaties t.o.v. elkaar hebben. Eén uiteinde van het polymeer wordt vastgelegd, terwijl aan het andere uiteinde met een constante kracht F wordt getrokken in de z -richting. Er heerst een temperatuur T . Afgezien van een constante (die we zullen verwaarlozen) wordt de potentiële energie van een willekeurige configuratie van het polymeer gegeven door:

$$V(\theta_1, \phi_1, \dots, \theta_N, \phi_N) = - \sum_{i=1}^N F \ell \cos(\theta_i) ,$$

waarin θ_i en ϕ_i de hoeken zijn die de oriëntatie (in drie dimensies) vastleggen van de i -de monomeer t.o.v. een as evenwijdig aan de z -as. Neem aan dat de waarschijnlijkheidsdichtheid $P(\theta_1, \phi_1, \dots, \theta_N, \phi_N)$ van configuraties van het polymeer alleen bepaald wordt door de potentiële energie. Het feit dat P een waarschijnlijkheidsdichtheid is (d.w.z. genormeerd op 1) betekent dat:

$$\int P(\theta_1, \phi_1, \dots, \theta_N, \phi_N) \prod_{i=1}^N \sin(\theta_i) d\theta_i d\phi_i = 1 .$$

- (a) Bereken de partitie functie Z .
 (b) Bereken de gemiddelde potentiële energie $\langle V \rangle$ als functie van F en $\beta (\equiv 1/k_B T)$.
 (c) Voor een klassiek systeem is de aanname gerechtvaardigd dat de gemiddelde kinetische energie evenredig is met $Nk_B T$. Bereken met deze aanname de entropie S van het polymeer door (slimme) integratie van de thermodynamische relatie:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} ,$$

met E de (gemiddelde) totale energie.

(Aanwijzing: Maak zonodig gebruik van het feit dat de primitieve functie van $x / \sinh^2(x)$ gegeven wordt door $-x \coth(x) + \log(\sinh(x))$.)