UITWERKING TENTAMEN
STATISTISCHE EN THERMISCHE FYSICA 1
21 juni 2005

1) (Andere antwoorden zijn niet noodzakelijk incorrect)

(a) Stirling's benadering: $N! \simeq N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}$
($N! \simeq N^N e^{-N}$ is ook goed gerekend).

(b) De concentratie op hoogte z is evenredig met $e^{-z/h}$ met h de schaalhoogte. De gevraagde concentratie-verhouding is dan:

$$\frac{n_{O_2}(z{=}8\text{ km})}{n_{O_2}(z{=}4\text{ km})} = \frac{e^{-8/8}}{e^{-4/8}} = 1/\sqrt{e} \simeq 0.61$$

(c) De *thermodynamische limiet* is de limiet waarin deeltjesaantal N, volume V en energie E naar oneindig gaan, maar zodanig dat de gemiddelde deeltjesdichtheid N/V en de energie per deeltje E/N constant blijven (d.w.z. alle verhoudingen van E, V en N blijven constant).

(d) We spreken van een *ontaard* Fermi gas, indien de temperatuur zeer laag is vergeleken met de Fermi temperatuur, d.w.z. indien geldt: $k_{\mathrm{B}}T \ll \varepsilon_{\mathrm{F}}$ (met ε_{F} de Fermi energie). De één-deeltjes toestanden met energie $\varepsilon > \varepsilon_{\mathrm{F}}$ zijn dan praktisch onbezet en die met $\varepsilon \leq \varepsilon_{\mathrm{F}}$ praktisch volledig bezet.

(e) Voor de preciese figuur zie "Garrod", Fig. 7.5 op p. 177. Er zijn twee fasen: één bij lage temperatuur en hoge dichtheid met een condensaat van bosonen en één bij hoge temperatuur en lage dichtheid zonder condensaat (een gewoon Bose gas). De scheidingslijn gaat door de oorsprong (dichtheid $n = 0$ en temperatuur $T = 0$) en gedraagt zich als $T^{3/2}$.

2) (a) Aantal toestanden: $N + 1$; van 0 open (totale energie 0) tot en met N open (totale energie $N\varepsilon$) verbindingsstukjes.

(b) Partitiefunctie $\equiv$ kanonieke toestandssom:

$$Z = \sum_{s=0}^{N} e^{-s\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T} = \frac{1 - e^{-(N+1)\beta\varepsilon}}{1 - e^{-\beta\varepsilon}}$$

(c) n dichte verbindingsstukjes, d.w.z. $N - n$ open verbindingdsstukjes, d.w.z. een toestand met energie: $E_n = (N - n)\varepsilon$. Waarschijnlijkheid van een dergelijke toestand:

$$P_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta\varepsilon(N-n)} ,$$

met Z gegeven onder (b).

(d) Noem s het aantal open stukjes. Dan geldt:

$$\langle s\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{s=0}^{N} s\, e^{-s\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial(\beta\varepsilon)}\left(\sum_{s=0}^{N} e^{-s\beta\varepsilon}\right)$$

Daarom:

$$\langle s\rangle = -\frac{\partial}{\partial(\beta\varepsilon)}(\log Z)$$

Met het resultaat van (b) volgt dan:

$$\langle s\rangle = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1-e^{-\beta\varepsilon}} - \frac{(N+1)e^{-\beta\varepsilon(N+1)}}{1-e^{-\beta\varepsilon(N+1)}} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon}-1} - \frac{N+1}{e^{\beta\varepsilon(N+1)}-1}$$

In de lage-temperatuur limiet, $\beta\varepsilon \gg 1$, vindt men:

$$\langle s\rangle \simeq e^{-\beta\varepsilon}\left(1-(N+1)e^{-\beta\varepsilon N}\right)$$

Voor $\beta \to \infty$ gaat dit naar nul (voor $T \to 0$ zoekt het systeem de toestand met laagste energie op; d.w.z. alle stukjes dicht) en indien de temperatuur *voldoende laag* is ligt het aantal open stukjes dus tussen 0 en 1 (indien N niet heel groot is hangt die temperatuur licht van N af, maar dat wordt niet gevraagd).

3) Dit is, op onderdeel (c) na, ongeveer *Opgave 36* van werkcollege 9. Voor een uitgebreide uitwerking verwijs ik naar de uitwerking die je ongetwijfeld zelf gemaakt hebt n.a.v. het werkcollege. Ik volsta hier met enkele opmerkingen en een wat uitgebreidere uitleg bij (c).

(a) Belangrijk is mee te nemen dat de Hamiltonfunctie een som over de posities i bevat en dat de toestandssom een som is over configuraties $\{s_i\}$.

(b) Een volledig juist antwoord analyseert ook het speciale geval: $T = 0$, d.w.z. $\beta \to \infty$. In dat geval is het niet voldoende gewoon $h = 0$ in te vullen (voor *spontane* magnetisatie) in de verkregen uitdrukking voor M. Immers, in die uitdrukking staat steeds de combinatie βh. In de limiet $T \to 0$ wordt $M = N$; we noemen dit toch geen spontane magnetisatie voor $T = 0$ omdat dit het uiterste punt is van de temperatuurschaal, dat bovendien niet bereikt kan worden.

(c) De grafiek van $M(h)$ voor vaste $T \neq 0$ begint bij 0 voor $h = 0$ en stijgt geleidelijk naar de waarde N voor $h \to \infty$. De grafiek van $M(T)$ voor vaste $h \neq 0$ begint bij N voor $T = 0$ (volgt uit analyse bij (b)) en daalt geleidelijk naar 0 voor $T \to \infty$.

4) (a) Aangezien de energie van de bosonen gegeven wordt door: $\varepsilon_0 + p^2/2M$, is de Bose-Einstein verdeling (gemiddelde bezetting van de 1-deeltjestoestand) bij (kinetische) energie $\varepsilon = p^2/2M$:

$$f_{\mathrm{BE}}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\alpha+\beta(\varepsilon_0+\varepsilon)} - 1}$$

Het aantal bosonen dat niet in de $\varepsilon = 0$ toestand zit is dan:

$$N = \int_0^\infty d\varepsilon\, \mathcal{D}(\varepsilon) f_{\mathrm{BE}}(\varepsilon)$$

met toestandsdichtheid $\mathcal{D}(\varepsilon) = \gamma V \sqrt{\varepsilon}$. De dichtheid $n = N/V$ is dan inderdaad de gegeven uitdrukking.

(b) In een 3D ideaal Bose gas treedt Bose-condensatie op wanneer de (in dit geval) effectieve affiniteit α bijna nul gekozen moet worden, zodat de dichtheid van deeltjes **niet** in de laagste-energie toestand maximaal is geworden. Aangezien $\varepsilon = 0$ de laagste-energie toestand is treedt dit voor de integraal in (a) op indien: $\alpha + \beta\varepsilon_0 \approx 0$, ofwel: $\boxed{\alpha_B \approx -\beta\varepsilon_0}$

(c) Bij zeer lage temperatuur is de chemische potentiaal μ_A van de fermionen praktisch gelijk aan $\varepsilon_{\mathrm{F}} \Longrightarrow \alpha_A \equiv -\beta\mu_A \approx -\beta\varepsilon_{\mathrm{F}} \Longrightarrow \boxed{\alpha_A \approx -\beta\varepsilon_{\mathrm{F}}}$

(d) Indien de reactie in evenwicht is moet gelden: $2\alpha_A = \alpha_B$ (energie om twee A-deeltjes toe te voegen gelijk aan de energie om één B-deeltje toe te voegen) $\Longrightarrow \boxed{\varepsilon_{\mathrm{F}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0}$

(e) Voor zeer lage T is $f_{\mathrm{FD}}(\varepsilon)$ bijna een stapfunctie; de dichtheid van fermionen is dan:

$$n_A = \frac{1}{V}\int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}}} d\varepsilon\, \tilde{\mathcal{D}}(\varepsilon) = 2\tilde{\gamma}\int_0^{\varepsilon_{\mathrm{F}}} d\varepsilon\, \sqrt{\varepsilon} = \frac{4}{3}\tilde{\gamma}\varepsilon_{\mathrm{F}}^{3/2} = \frac{1}{3}\sqrt{2}\tilde{\gamma}\varepsilon_0^{3/2}$$

De dichtheid van de bosonen bij zeer lage temperatuur volgt dan door gebruik te maken van de gegeven behouden dichtheid n_0:

$$n_0 = 2n_B + n_A \Longrightarrow n_B = \tfrac{1}{2}\left(n_0 - \frac{1}{3}\sqrt{2}\tilde{\gamma}\varepsilon_0^{3/2}\right)$$