

Schrijf op elk vel dat je inlevert NAAM, VOORLETTERS en COLLEGEKAARTNUMMER. Begin elke opgave op een nieuwe pagina.

Het aantal punten dat je met de verschillende opgaven kunt verdienen is als volgt: 1) 25 punten, 2) 30 punten, 3) 25 punten en 4) 20 punten. Bedenk dat ook gedeeltelijk correcte antwoorden punten op kunnen leveren.

- 1) Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen of opdrachten:
 - (a) Wat is *Stirling's benadering* voor $N!$ (N faculteit)?
 - (b) Wat is de verhouding van concentraties zuurstof op 8 km en 4 km hoogte in de aardatmosfeer, bij een gegeven *schaalhoogte* van 8km?
 - (c) Wat is de *thermodynamische limiet*?
 - (d) Wanneer spreken we van een *ontaard* Fermi gas?
 - (e) Schets het fase-diagram van een drie-dimensionaal ideaal gas van bosonen in het (temperatuur, dichtheid)-vlak en benoem de verschillende fasen.
- 2) Gegeven een rits (of: twee slierten al dan niet verstrengeld DNA) met N verbindingsstukjes bij temperatuur T . Elk verbindingsstukje kan zich in twee toestanden bevinden: *open* (met energie $\varepsilon > 0$) of *dicht* (met energie 0). De rits kan maar naar één kant open, d.w.z. een verbindingsstukje kan alleen open als alle voorgaande verbindingsstukjes al open zijn.
 - (a) Wat is het aantal toestanden waarin de rits zich kan bevinden?
 - (b) Bereken de partitiefunctie.
 - (c) Wat is de waarschijnlijkheid om de rits in de toestand met n dichte verbindingsstukjes aan te treffen?
 - (d) Bereken het gemiddeld aantal *open* verbindingsstukjes. Tussen welke twee gehele getallen ligt dit gemiddelde aantal indien T voldoende laag is?

Aanwijzing: Gebruik zonodig de formule: $\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$

- 3) De Hamiltonfunctie voor een keten van N Ising spins s_i ($i = 1, \dots, N$), die elk de waarden $+1$ en -1 kunnen aannemen, in magneetveld h en waarvan alleen de burens met elkaar wisselwerken (met wisselwerkingsconstante J), wordt gegeven door:

$$H = -J \sum_i s_i s_{i+1} - h \sum_i s_i .$$

- (a) Laat zien dat de magnetisatie M , gedefinieerd als het statistisch fysisch gemiddelde van $\sum_i s_i$, bij temperatuur T gegeven wordt door de formule:

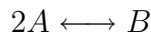
$$M = \left(\frac{\partial \phi}{\partial (\beta h)} \right)_\beta ,$$

met ϕ de kanonieke potentiaal en $\beta = 1/k_B T$.

- (b) Laat zien dat dit één-dimensionale (1D) Ising model bij geen enkele temperatuur T een *spontane* magnetisatie vertoont. Maak gebruik van de volgende exacte uitdrukking voor de kanonieke potentiaal voor het 1D Ising model met interactie-constante J tussen naburige spins en in een magneetveld h :

$$\phi(N, \beta, h) = N \left\{ \beta J + \log \left[\cosh(\beta h) + \sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}} \right] \right\} .$$

- (c) Schets de grafieken: (i) $M(h)$ voor vaste $T \neq 0$, en (ii) $M(T)$ voor vaste $h \neq 0$.
- 4) Beschouw een ideaal gas dat een mengsel is van spin- $\frac{1}{2}$ fermionen, die we A-deeltjes noemen, en spin-0 bosonen, die we B-deeltjes noemen. De A-deeltjes hebben massa m en de B-deeltjes massa M . We nemen aan dat $M < 2m$ en $M - 2m \ll m$ en veronderstellen dat de volgende deeltjes-transformatie reactie mogelijk is:



De A- en B-deeltjes hebben deeltjesdichtheden n_A en n_B , respectievelijk. Gezien de reactie is dan de volgende deeltjesdichtheid n_0 een behouden grootte: $n_0 = n_A + 2n_B$. Omdat in de reactie $B \rightarrow 2A$ energie behouden is, moet er gelden dat indien we de energie van stilstaande A-deeltjes gelijk aan nul nemen, de energie van B-deeltjes met impuls \vec{p} gegeven wordt door:

$$E = \varepsilon_0 + \frac{p^2}{2M} ,$$

waarin $\varepsilon_0 = (M - 2m)c^2$ met c de lichtsnelheid. Indien we de kinetische energie van de B-deeltjes aanduiden met ε , dan wordt de toestandsdichtheid van deze deeltjes gegeven door: $\gamma V \sqrt{\varepsilon}$ met volume V en γ een constante die van M en de constante van Planck afhangt. Voor de A-deeltjes geldt een soortgelijke toestandsdichtheid, met een aangepaste $\tilde{\gamma}$ (vanwege de andere massa) en een extra factor 2 (vanwege de spin). Beschouwen we dit mengsel bij zeer lage temperatuur T dan zullen de quantumeigenschappen van zowel de bosonen (Bose condensatie) als de fermionen (Fermi energie ε_F) op de voorgrond treden.

- (a) Beargumenteer dat de B-deeltjesdichtheid van niet-Bose-gecondenseerde deeltjes gegeven wordt door:

$$n = \gamma \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{e^{\alpha + \beta(\varepsilon_0 + \varepsilon)} - 1} ,$$

met α de affiniteit en $\beta = 1/k_B T$.

- (b) Wat moet gelden voor de B-deeltjes affiniteit α_B , indien bij zeer lage temperatuur de bosonen gaan Bose-condenseren?
- (c) Waaraan is de affiniteit α_A voor het fermionengas gelijk bij zeer lage temperatuur?
- (d) Gegeven dat de transformatie reactie in evenwicht is, wat volgt daar uit voor het verband tussen ε_0 en ε_F ?
- (e) Leidt een formule af voor de dichtheid n_B bij zeer lage temperatuur, uitgedrukt in ε_0 en n_0 .