UITWERKING TENTAMEN
STATISTISCHE EN THERMISCHE FYSICA 1

20 juni 2006

1) (Andere antwoorden zijn niet noodzakelijk incorrect)

(a) Het *centrale limiet theorema* stelt dat de waarschijnlijkheidsverdeling voor het rekenkundig gemiddelde van N onafhankelijke stochastische variabelen ($x = (x_1 + x_2 + \ldots + x_N)/N$) bij groter wordende N niet alleen steeds scherper wordt (fluctuatie Δx neemt af), maar ook steeds meer op een Gaussische verdeling (of: *normaalverdeling*) gaat lijken (ongeacht de waarschijnlijkheidsverdelingen voor $x_1, \ldots, x_N$).

(b) 1 km/s (Er wordt geen uitleg gevraagd, maar je kunt dit ook uitrekenen via $\frac{1}{2} m_{\mathrm{He}} v^2 = \frac{1}{2} k_{\mathrm{B}} T$ en de gegeven getallen; in een snelle berekening maak je gebruik van het feit dat bij kamertemperatuur $k_{\mathrm{B}} T \approx 1/40$ eV)

(c) $S = k \log W$ (zoals het op de grafsteen van Boltzmann staat); met S de entropie, $k = k_{\mathrm{B}}$ de constante van Boltzmann en W het aantal (micro)toestanden (dat een gegeven macrotoestand oplevert).

(d) Temperatuur T, volume V en deeltjesaantal N.

(e) Zie bijvoorbeeld de grafiek voor ρ_s/ρ in "Garrod", Fig. 7.14 op p.189. De grafiek voor n_0/n (dichtheid condensaat gedeeld door totale dichtheid) is nul voor $T > T_{\mathrm{BEC}}$ en daalt continu van 1 naar 0 voor T lopend van 0 naar T_{BEC}.

2) (a)

$$H_N(x,p) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} \quad \text{met} \quad p_i^2 = p_{xi}^2 + p_{yi}^2 + p_{zi}^2$$

(b)

$$\Lambda(\alpha, \beta, V) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha N}}{N! h^{3N}} \int_V d^{3N}x \int d^{3N}p \; e^{-\beta H_N(x,p)}$$

α: affiniteit; $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ met k_{B} de Boltzmannconstante en T de temperatuur; V: volume; N: deeltjesaantal; h: constante van Planck; x staat voor de $3N$ coordinaten en p voor de $3N$ impulscomponenten van de N deeltjes.

(c)

$$\Lambda(\alpha, \beta, V) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha N}}{N!} Z_1^N$$

met Z_1 de **kanonieke** toestandssom voor 1 deeltje:

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int_V d^3x \int d^3p \; e^{-\beta p^2/2m} = \frac{1}{h^3} \cdot V \cdot \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} = \frac{V}{\lambda^3}$$

met λ gegeven in de opgave. Dan:

$$\Lambda = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha N}}{N!} \frac{V^N}{\lambda^{3N}} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\frac{Ve^{-\alpha}}{\lambda^3}\right)^N = \exp\left(\frac{Ve^{-\alpha}}{\lambda^3}\right)$$

(d)

$$\langle N \rangle = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)_{\beta,V} \qquad \text{met} \quad \psi = \log \Lambda = \frac{Ve^{-\alpha}}{\lambda^3}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\langle N \rangle = \frac{Ve^{-\alpha}}{\lambda^3}}$$

$$\langle E \rangle = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right)_{\alpha,V} \qquad \text{via} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m}} \cdot \tfrac{1}{2}\beta^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\beta} \cdot \lambda$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\langle E \rangle = \tfrac{3}{2\beta} \cdot \tfrac{Ve^{-\alpha}}{\lambda^3}}$$

$$\beta PV = \psi \Longrightarrow \boxed{P = \tfrac{1}{\beta} \cdot \tfrac{e^{-\alpha}}{\lambda^3}}$$

(e) De ideale gaswetten zijn:

$$PV = \langle N \rangle k_{\mathrm{B}} T \qquad \text{en} \qquad \langle E \rangle = \tfrac{3}{2} \langle N \rangle k_{\mathrm{B}} T$$

(een van de twee kan ook vervangen worden door een combinatie van deze twee, bv. $PV = \frac{2}{3}\langle E \rangle$).
Via de resultaten uit onderdeel (d) voor P en $\langle N \rangle$:

$$PV = \frac{e^{-\alpha} V}{\beta \lambda^3} = \frac{\langle N \rangle}{\beta} = \langle N \rangle k_{\mathrm{B}} T \qquad \textbf{OK}$$

Via de resultaten uit onderdeel (d) voor $\langle E \rangle$ en $\langle N \rangle$:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2\beta} \cdot \frac{Ve^{-\alpha}}{\lambda^3} = \frac{3\langle N \rangle}{2\beta} = \tfrac{3}{2}\langle N \rangle k_{\mathrm{B}} T \qquad \textbf{OK}$$

(f)

$$(\Delta N)^2 = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2}\right)_{\beta,V} = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\langle N \rangle\right) = \frac{e^{-\alpha} V}{\lambda^3} = \langle N \rangle$$

Dus $(\Delta N)^2$ is recht evenredig met $\langle N \rangle$ en dus een extensieve grootheid (want: groeit recht evenredig met de systeemgrootte, $\langle N \rangle$ of V).

3) Dit is een meer uitgewerkte vorm (aangezien op het werkcollege het boek gebruikt kan worden en op het tentamen niet) van *Opgave 35* van werkcollege 9. De opgave behelst een analyse zoals op pagina's 176-178 in "Garrod", maar nu voor het geval van twee dimensies (i.p.v. drie dimensies in het boek). Voor een uitgebreide uitwerking verwijs ik naar de uitwerking die je ongetwijfeld zelf gemaakt hebt n.a.v. het werkcollege. Ik volsta hier met enkele opmerkingen.

   (a) Belangrijk (voor het vervolg) is op te merken dat $0 \le \alpha < \infty$, aangezien anders de gemiddelde bezettingsgraad negatief zou kunnen zijn, hetgeen onfysisch is.

   (b) Een dergelijke berekening behoort tot je standaardbagage te horen; is enkele keren op zowel college als werkcollege voorbij gekomen. Het eindresultaat in dit geval is: $g(\varepsilon) = mV/2\pi\hbar^2$; d.w.z. de toestandsdichtheid is onafhankelijk van ε en evenredig met het volume V $(= L^2)$.

   (c) $\langle N \rangle = \int d\varepsilon\, g(\varepsilon) f_{\mathrm{BE}}(\varepsilon) = \ldots$
   Merk op: We hoeven de $\varepsilon = 0$ toestand nu niet apart te behandelen (vgl. boek) aangezien die in de integraal gewoon bijdraagt, net als in de originele som:

$$\langle N \rangle = \sum_{k_x, k_y} f_{\mathrm{BE}}(\varepsilon(k_x, k_y))$$

   (d) Gebruik onderdelen (a) en (c); hoe groter α, des te kleiner de integrand, des te kleiner de integraal: ρ is monotoon dalende functie voor groter wordende α. ρ is dus maximaal voor $\alpha = 0$ (kleinst toegestane waarde van α). Voor $\alpha = 0$ is in te zien (bv. met behulp van de gegeven divergerende integraal) dat de integraal divergeert en dus willekeurig groot is.

   (e) Nu kan met behulp van de voorgaande onderdelen een redenering gemaakt worden (doe dat zelf!), dat er geen noodzaak is de $\varepsilon = 0$ toestand macroscopisch te bezetten, d.w.z. geen BEC in het 2-dimensionale ideale Bose gas. Het essentiële verschil met drie dimensies zit in de ε-afhankelijkheid van de toestandsdichtheid.

4) (a) Via $F = E - TS$. Voor n vacatures: $E = n\varepsilon_v$. Entropie S wordt gegeven door k_{B} maal de logarithme van het aantal mogelijke toestanden. Voor n vacatures is het aantal mogelijke toestanden gegeven door het aantal manieren om de n vacatures over de N roosterposities te verdelen: $\binom{N}{n}$. De gevraagde uitdrukking is dan:

$$\boxed{F(n) = n\varepsilon_v - k_{\mathrm{B}}T \, \log \binom{N}{n}}$$

   (b) In evenwicht moet in de gegeven omstandigheden (want bij gegeven temperatuur T en deeltjesaantal) de vrije energie F minimaal (want kanonieke potentiaal ϕ maximaal) zijn. De evenwichtswaarde voor n/N volgt dus uit:

$$\frac{dF}{dn} = 0$$

In de verdere berekening gebruiken we de eenvoudigste vorm van Stirling's benadering voor de faculteit functie: $n! \approx n^n e^{-n}$. Hieruit volgt:

$$\frac{d}{dn}(\log n!) = \log n$$

We nemen verder aan dat zowel N, n als $N-n$ dusdanig groot zijn dat "Stirling"gebruikt mag worden (zoals bekend hoeven ze daar niet echt groot voor te zijn; verder zal dit aan het eind van de berekening ook een gerechtvaardigde aanname blijken te zijn). Dan:

$$\frac{dF}{dn} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_v - k_\mathrm{B}T\left[-\log n + \log(N-n)\right] = 0$$

$$\log\left(\frac{n}{N-n}\right) = -\frac{\varepsilon_v}{k_\mathrm{B}T}$$

$$\frac{n}{N-n} = e^{-\varepsilon_v/k_\mathrm{B}T} \quad \rightarrow \quad n = N\,e^{-\varepsilon_v/k_\mathrm{B}T} - n\,e^{-\varepsilon_v/k_\mathrm{B}T}$$

$$n = \frac{N\,e^{-\varepsilon_v/k_\mathrm{B}T}}{1+e^{-\varepsilon_v/k_\mathrm{B}T}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{n = \frac{N}{1+e^{\varepsilon_v/k_\mathrm{B}T}}}$$

(c) Bij kamertemperatuur: $k_\mathrm{B}T \approx 1/40$ eV (zie onderdeel 1(b) of doe een berekening met de gegeven waarden) $\Longrightarrow$ $\varepsilon_v/k_\mathrm{B}T \approx 40$. Dan is de 1 in de noemer van het resultaat bij (b) verwaarloosbaar.
Dus: $\frac{n}{N} \approx \frac{1}{e^{40}} = e^{-40} = \left(e^{-10}\right)^4 \approx (4.5)^4 \times 10^{-20} \approx \boxed{4 \times 10^{-18}}$
(Inderdaad is n nog steeds groot indien voor N een reële schatting van het getal van Avogadro, 6×10^{23}, wordt genomen)