TENTAMEN STATISTISCHE EN THERMISCHE FYSICA 1 20 juni 2006
(College Dr. P.J.H. Denteneer, voorjaar 2006) 14 - 17 uur

Schrijf op elk vel dat je inlevert NAAM, VOORLETTERS en COLLEGEKAARTNUMMER. Begin elke opgave op een nieuwe pagina.
Het aantal punten dat je met de verschillende opgaven kunt verdienen is als volgt: 1) 25 punten, 2) 30 punten, 3) 25 punten en 4) 20 punten. Bedenk dat ook gedeeltelijk correcte antwoorden punten op kunnen leveren.

1) Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen of opdrachten:

   (a) Geef een kwalitatieve omschrijving van het *centrale limiet theorema* in de waarschijnlijkheidstheorie.

   (b) Welke snelheid ligt het dichtst bij de snelheid van helium atomen in een gas bij kamertemperatuur: 1 mm/s, 1 m/s of 1 km/s?
   [Maak zonodig een afschattende berekening m.b.v. de volgende gegevens: $k_B = 8.617 \times 10^{-5}$ eV/K, 1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J en $m_{\mathrm{He}} = 6.7 \times 10^{-27}$ kg]

   (c) Wat is de formule (bedacht door Boltzmann) die het meest kernachtig het verband legt tussen de statistische mechanica en de thermodynamica? Benoem de gebruikte symbolen.

   (d) Noem de (thermodynamische) grootheden waarvan de *kanonieke* toestandssom een functie is.

   (e) Schets een kwalitatieve grafiek van de dichtheid van het Bose-Einstein condensaat als functie van de temperatuur in een ideaal Bose gas in drie dimensies.

2) Gegeven een ideaal gas van atomen in drie dimensies met massa m bij temperatuur T in een volume V waarvan het aantal atomen N fluctueert.

   (a) Geef een uitdrukking voor de klassieke Hamiltonfunctie H_N voor het gas met N deeltjes.

   (b) Schrijf een uitdrukking op voor de groot-kanonieke toestandssom Λ en benoem de symbolen die je gebruikt.

   (c) Bereken Λ. Vereenvoudig het resultaat door de formule voor de thermische golflengte λ te gebruiken: $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}} T}$.

   (d) Bereken het gemiddeld aantal deeltjes $\langle N \rangle$, de gemiddelde energie $\langle E \rangle$ en de druk P van het gas.

   (e) Laat zien dat de resultaten van (d) overeenkomen met de ideale gaswetten.

   (f) Bereken de gekwadrateerde fluctuatie in het deeltjesaantal, $(\Delta N)^2$ ($\equiv \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle$), en laat zien dat dit een *extensieve* grootheid is.

Z.O.Z.

3) Beschouw een 2-dimensionaal ideaal gas van bosonen met spin 0 in een vierkant met zijde L. Het "volume" V van het systeem wordt dan gegeven door L^2. De één-deeltjes energie niveaus zijn gegeven door:

$$\varepsilon_{k_x,k_y} = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2) \quad \text{met} \quad k_x, k_y = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y) \quad \text{met} \quad n_x, n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

(a) Geef de uitdrukking voor de gemiddelde bezettingsgraad van de toestand met energie ε, $f_{\mathrm{BE}}(\varepsilon)$. Welke waarden kan de affiniteit α aannemen?

(b) Bereken de toestandsdichtheid $g(\varepsilon)$.

(c) Geef een uitdrukking voor het gemiddelde aantal deeltjes $\langle N \rangle$, gebruikmakend van de antwoorden onder (a) en (b), voor het geval dat L zeer groot wordt gekozen.

(d) De deeltjesdichtheid ρ wordt gegeven door $\langle N \rangle / V$. Beschrijf in woorden hoe ρ van α afhangt. Hoe groot kan ρ maximaal worden?
(Aanwijzing: de integraal $\int_0^\infty dx\, \frac{1}{x}$ divergeert)

(e) Beredeneer met behulp van de voorgaande onderdelen dat in een 2-dimensionaal ideaal Bose gas géén Bose-Einstein condensatie optreedt. Waarin ligt het essentiële verschil met het 3-dimensionale ideale Bose gas?

4) Een perfect atomair kristal heeft precies één atoom op elke roosterpositie. Een dergelijke toestand is alleen stabiel bij temperatuur $T = 0$. Bij hogere temperatuur zullen er door thermische fluctuaties allerlei defecten optreden. Een eenvoudig type defect is de *vacature*, een ontbrekend atoom op een roosterpositie. Gegeven een kristal met N roosterposities bij temperatuur T. De energie om een vacature te creëren, d.w.z. de energie nodig om een atoom van een roosterpositie te verwijderen en naar het oppervlak van het kristal te brengen, bedraagt ε_v. De hiermee gepaard gaande volumeverandering is verwaarloosbaar.
De (Helmholtz) vrije energie F (die bij gegeven temperatuur gelijk is aan $-k_B T \phi$, met ϕ de kanonieke potentiaal) hangt als volgt met de (inwendige) energie E en de entropie S samen: $F = E - TS$.

(a) Geef een uitdrukking voor de vrije energie $F(n)$ voor het geval er n vacatures in het kristal aanwezig zijn.

(b) Bereken de evenwichtsconcentratie van vacatures n/N bij temperatuur T.

(c) Geef een orde-van-grootte schatting voor n/N bij kamertemperatuur indien een realistische waarde $\varepsilon_v = 1$ eV wordt aangenomen.

Algemene aanwijzingen: Gebruik zonodig de volgende gegevens:
$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ (Stirling's benadering), $k_B = 8.617 \times 10^{-5}$ eV/K, $e^{-10} = 4.5 \times 10^{-5}$)