TENTAMEN STATISTISCHE EN THERMISCHE FYSICA 1 19 juni 2007
(College Dr. P.J.H. Denteneer, voorjaar 2007) 14 - 17 uur

Schrijf op elk vel dat je inlevert NAAM, VOORLETTERS en COLLEGEKAARTNUMMER. Begin elke opgave op een nieuwe pagina.
Het aantal punten dat je met de verschillende opgaven kunt verdienen is als volgt: 1) 25 punten, 2) 30 punten, 3) 25 punten en 4) 20 punten. Bedenk dat ook gedeeltelijk correcte antwoorden punten op kunnen leveren.

1) Geef kort en bondig antwoord op de volgende vragen of opdrachten (er wordt niet om berekeningen of afleidingen gevraagd):

   (a) Geef de formule voor het aantal verschillende manieren om N deeltjes over M toestanden te verdelen, indien meerdere deeltjes in een toestand zijn toegestaan.

   (b) Wat wordt verstaan onder het begrip *(uniforme) intensieve observabele* (in de verzameling van macroscopische observabelen)? Geef een voorbeeld.

   (c) Schets een kwalitatieve grafiek van de frequentie-verdelingsfunctie (of: toestandsdichtheid) $D(\omega)$ voor roostertrillingen in een kristal in de *Debije-benadering*. Geef in de grafiek aan waar de *Debije-frequentie* ligt.

   (d) Welke thermodynamische grootheid is optimaal in evenwicht voor een systeem bij gegeven temperatuur, volume en affiniteit? Is deze grootheid dan minimaal of maximaal? (Voor *affiniteit* mag hier ook *chemische potentiaal* gelezen worden)

   (e) Waarom heet de fase-overgang tussen normaal en superfluïde Helium-4 de *lambda-overgang*?

2) Gegeven een systeem van N drie-dimensionale, klassieke, ononderscheidbare harmonische oscillatoren (massa m, frequentie ω) bij temperatuur T, waarvan de beweging van iedere oscillator wordt bepaald door de Hamilton-functie:

$$H_1(\vec{r},\vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2} m\omega^2 r^2 \quad ,$$

waarin $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ en $p = |\vec{p}| = \sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2}$.

   (a) Geef een formule voor de kanonieke toestandssom Z_N van dit systeem en beschrijf de symbolen die je gebruikt.

   (b) Bereken Z_N.

   (c) Bereken de gemiddelde kinetische energie $\langle K \rangle$ en de gemiddelde potentiële energie $\langle V \rangle$.

   (d) Bediscussieer het resultaat van (c) in het licht van het *equipartitie theorema.*

   (e) Laat door middel van een gedetailleerde berekening zien dat de *rms* fluctuatie in de x-coördinaat, Δx, voor een willekeurige oscillator groter is naarmate de temperatuur hoger is. *rms* staat voor de wortel uit het gemiddelde van het kwadraat (*root-mean-square*).

Z.O.Z.

3) Voor een ideaal gas van fermionen is de energie van een deeltje: $\varepsilon(\vec{k}) = \hbar^2 k^2/2m$ met $k \equiv |\vec{k}|$, de lengte van de golfvector $\vec{k}$. Ga er van uit dat de deeltjes-energie is gevonden door de Schrödinger-vergelijking op te lossen in een ruimte met lengte L in elk van de onafhankelijke richtingen (bijvoorbeeld een kubus in drie dimensies), gebruikmakend van periodieke randvoorwaarden. De volgende formules gelden voor "grand potential", gemiddeld aantal deeltjes en gemiddelde energie van het gas:

$$\begin{aligned}
\psi &= \int_0^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon)\, \log\left[1 + \exp(-\alpha - \beta\varepsilon)\right] \;, \\
\langle N \rangle &= \int_0^\infty d\varepsilon\, D(\varepsilon)\, f_{\mathrm{FD}}(\varepsilon) \quad \text{en} \quad \langle E \rangle = \int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon\, D(\varepsilon)\, f_{\mathrm{FD}}(\varepsilon).
\end{aligned}$$

(a) Omschrijf de betekenis van $D(\varepsilon)$ en $f_{\mathrm{FD}}(\varepsilon)$.

(b) Bepaal $D(\varepsilon)$ voor een twee–dimensionaal ideaal gas van fermionen met spin j.

(c) Laat zien dat voor een gas in d dimensies geldt: $D(\varepsilon) = c_d\, \varepsilon^\gamma$, en bepaal γ als functie van d. De coëfficiënt c_d hoeft niet berekend te worden.

(d) Toon aan dat $PV = 2\langle E \rangle/d$ (druk P, volume V).

(e) Laat zien dat $PV > \langle N \rangle k_{\mathrm{B}} T$. (*de ideale gaswet geldt dus niet*)

4) De totale energie voor een keten van N Ising spins s_i ($i = 1, \ldots, N$) die elk de waarden $+1$ en -1 kunnen aannemen en waarvan alleen de buren met elkaar wisselwerken (met wisselwerkingsconstante J) wordt gegeven door:

$$E = -J\,(s_1 s_2 + s_2 s_3 + \cdots + s_{N-1} s_N)$$

(a) Wat wordt de uitdrukking voor de energie E in termen van nieuwe variabelen t_i ($i = 1, \ldots, N$) met $t_1 = s_1$, $t_2 = s_2 s_1$, $t_3 = s_3 s_2, \ldots, t_N = s_N s_{N-1}$. Welke waarden nemen de variabelen t_i aan?

(b) Laat zien dat er een één-op-één relatie is tussen de set van variabelen $\{s_i\}$ en de set van variabelen $\{t_i\}$. Je kunt dit bijvoorbeeld doen door de inverse transformatie (d.w.z.: wat zijn de s_i bij gegeven t_i?) op te schrijven. De elegantste vorm vind je door je te realiseren welke waarden t_i^2 kan aannemen.

(c) Bereken de kanonieke toestandssom voor de Ising-keten bij temperatuur T.

(d) Bereken de gemiddelde energie $\langle E \rangle$ en de soortelijke warmte C.

(e) Wat kun je concluderen uit de temperatuur-afhankelijkheid van C over het optreden van een fase-overgang in dit één-dimensionale Ising-model?