

Hertentamen Statistische en Thermische Fysica I
Maandag 18 augustus 2008
Duur: 3 uur

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam, studierichting**, en evt. **collegekaartnummer!** (TIP: lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag)

Uitslag: over ca. 3 weken bij studentenadministratie en op de STF1-webpagina. Als je bezwaar hebt tegen vermelding van je uitslag op de webpagina, geef dit dan duidelijk aan op het eerste blad.

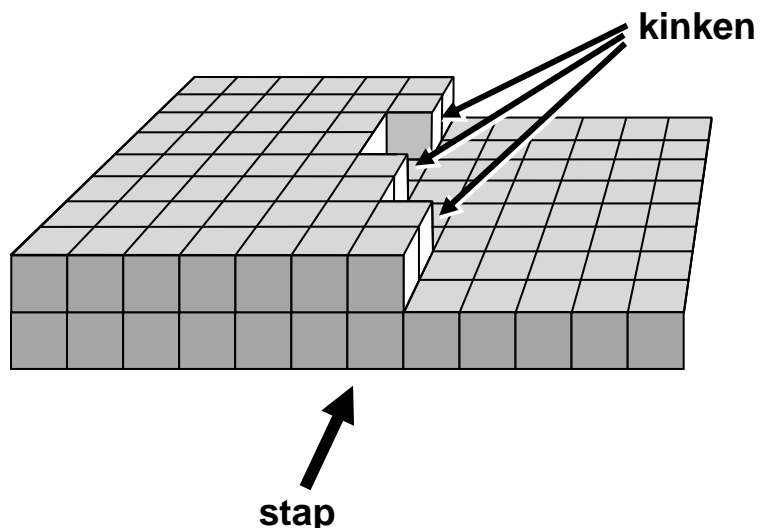
OPGAVE 1: Weetjes

Geef beknopt (maximaal 4 regels tekst per onderdeel) antwoord op de volgende vragen. Benoem daarbij telkens alle grootheden die je gebruikt.

- Wat is de kans om n keer een '6' te gooien in N worpen met een dobbelsteen?
- Hoe luidt de 'wet van de grote getallen' en wat betekent deze?
- Schrijf de Maxwell-verdeling op voor de x-componenten v_x van de snelheden van deeltjes met een massa m bij temperatuur T . Wat is de meest waarschijnlijke snelheid v_x in de x-richting?
- Wat is de bezettingsgraad van toestanden met energie ε voor een ensemble van bosonen bij temperatuur T ?
- Welke macroscopische grootheden liggen vast voor het canonieke ensemble en welke macroscopische grootheden hebben de vrijheid om te fluctueren?
- Geef een uitdrukking van de groot-canonieke potentiaal in termen van de entropie en andere macroscopische grootheden van het systeem.

OPGAVE 2: Stappen en kinken

De meeste kristaloppervlakken zijn niet perfect vlak. Ze bevatten *stappen* – verspringingen in de hoogte, ter grootte van 1 atoomafstand. Op hun beurt zijn de stappen niet perfect recht. Ze bevatten *kinken* – zijdelingse verspringingen in de stappositie, meestal enkelvoudig, d.w.z. over 1 atoomafstand. We gaan er in eerste instantie vanuit dat alleen enkelvoudige kinken mogelijk zijn. Deze situatie is schematisch weergegeven in de figuur, waarin we als voorbeeld een stuk van een stap zien met een lengte van 8 atoomafstanden met daarin 3 kinken, 2 naar links en 1 naar rechts. We nemen aan dat er een positieve energie E_k nodig is om in een recht stuk stap zo'n enkelvoudige kink te creëren. We beschouwen een stap in thermodynamisch evenwicht bij een temperatuur T en beginnen



eerst met de statistiek van een afzonderlijke positie langs een stap.

- a) Welke drie mogelijkheden zijn er voor de beschouwde stappositie? Welke partitiefunctie komt hiermee overeen voor die ene stappositie?
- b) Gebruik het antwoord op a) om af te leiden wat de kans is voor de beschouwde positie op een kink naar links en de kans voor die positie op een kink naar rechts. Wat is de totale kans op een kink op die positie, ongeacht de richting van die kink?

We verruimen nu onze blik en beschouwen een stap met een lengte van N atoomposities

- c) Hoeveel configuraties zijn er voor deze gehele stap? Wat is de daarmee gemoeide partitiefunctie voor de gehele stap?
- d) Wat is de kans op een totaal aantal van K kinken in deze stap, ongeacht hun richting?

Tenslotte voegen we nog een complicatie toe, door het stappen toe te staan om meervoudige kinken te bevatten; daarmee bedoelen we zijdelingse verspringingen in de stappositie over meerdere atoomafstanden. De hierbij geldende energetische spelregel vormt een natuurlijke uitbreiding van wat we eerder hebben gebruikt bij de enkelvoudige kinken: per atoomafstand 'kost' de kink een energie E_k . Daarmee is de enkelvoudige kink dus precies even 'kostbaar' als voorheen en is bijvoorbeeld een dubbele kink ook tweemaal zo duur. We beschouwen weer een afzonderlijke stappositie.

- e) Hoeveel mogelijkheden zijn er nu per stappositie? Laat zien dat de partitiefunctie voor die ene stappositie te schrijven is als $Z_1 = \coth\left(\frac{1}{2} E_k / k_B T\right)$.
- f) Wat is de kans voor die stappositie op een kink naar rechts met een diepte van L atoomposities?

OPGAVE 3: Elektronen en spontane magnetisatie

We bestuderen een driedimensionaal kubisch kristal met roosterafstand a bij temperatuur T . Het kristal bevat N_p roosterposities, waarover een ensemble van N_e elektronen beweegt. De elektronen hebben geen interactie met elkaar, maar ze ondervinden wel een periodieke wisselwerking met het rooster, waardoor hun energie als volgt afhangt van de golfvector $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$:

$$\varepsilon(\vec{k}) = -2t \left[\cos(k_x a) + \cos(k_y a) + \cos(k_z a) \right].$$

In deze uitdrukking is de energie t een maat voor de sterkte van de wisselwerking van de elektronen met het rooster. Elk van de componenten van \vec{k} kan een aantal, regelmatig verdeelde, discrete waarden aannemen tussen $-\pi/a$ en $+\pi/a$. De elektronen zijn verdeeld in twee deelgroepen, een met spin omhoog ($s = +1$) en de ander met spin omlaag ($s = -1$).

- a) We beschouwen eerst de toestandsdichtheid $D(\varepsilon)$ die overeenkomt met de uitdrukking voor $\varepsilon(\vec{k})$. Wat zijn de maximale en minimale waarden van ε ? Voor welke \vec{k} wordt de minimale waarde aangenomen? Bij welke \vec{k} is $D(\varepsilon)$ heel groot?
- b) Neem aan dat de spin-omhoog elektronen een chemische potentiaal μ_+ kunnen hebben die verschilt van de chemische potentiaal μ_- van spin-omlaag elektronen. Geef een uitdrukking (in de vorm van een integraal) voor de totale dichtheid $n = N_e/N_p$ van elektronen, ongeacht hun spin, en een daarmee verwante uitdrukking voor de magnetisatie m (gemiddelde spin per roosterpositie). Voor je herinnering: de chemische potentiaal hangt samen met de affiniteit, volgens $\alpha = -\beta\mu$, waarbij natuurlijk $\beta = 1/k_B T$.
- c) We beperken ons nu tot het absolute nulpunt. Vereenvoudig het resultaat van b) voor de magnetisatie m voor $T = 0$.

Voor spontane magnetisatie is het noodzakelijk dat het verschil tussen μ_+ en μ_- in stand wordt gehouden door het gemiddelde veld dat de elektronenspins van elkaar ondervinden: hiervoor nemen we aan dat $\mu_+ - \mu_- = Um$, waarbij U een positieve constante is.

- d) Bepaal, uitgaand van het antwoord bij c), hoe groot deze constante minimaal moet zijn voor het optreden van spontane magnetisatie bij $T = 0$. *Tip*: zet een 'cirkelredenering' op waarbij je uitgaat van een infinitesimale magnetisatie δm en je laat zien onder welke voorwaarde deze een voldoende grote $\mu_+ - \mu_-$ oplevert om een magnetisatie te veroorzaken van minimaal δm . Als hieraan voldaan wordt, leidt elke fluctuatie vanuit een ongemagnetiseerde beginsituatie $m = 0$ vanzelf tot magnetisatie.