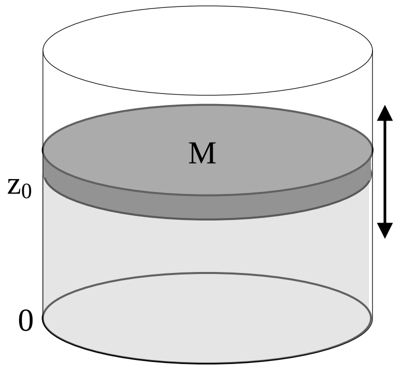
Tentamen Statistische en Thermische Fysica I
Donderdag 5 juni 2008
Duur: 3 uur

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam**, **studierichting**, en evt. **collegekaartnummer**! (TIP: lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag)

Uitslag: over ca. 3 weken bij studentenadministratie en op de STF1-webpagina. Als je bezwaar hebt tegen vermelding van je uitslag op de webpagina, geef dit dan duidelijk aan op het eerste blad.

OPGAVE 1: *Ideaal gas onder druk*

We beschouwen een ideaal gas met N deeltjes dat zich bij constante temperatuur in een verticale cilinder bevindt onder een zuiger met oppervlak A en massa M. De gasdeeltjes hebben elk een massa m. De zuiger kan wrijvingsloos omhoog of omlaag bewegen en wordt daarbij beschreven door één coördinaat z_0 en één impulscomponent p_0. Laat het effect van de zwaartekracht op de gasdeeltjes buiten beschouwing. Ons coördinatenstelsel is zo gekozen dat de bodem van de cilinder zich bij $z = 0$ bevindt.



a) Wat is de Hamiltoniaan van dit systeem?
b) Binnen welk thermodynamisch ensemble moet het systeem worden beschreven? Geef een uitdrukking voor de waarschijnlijk-heidsdichtheid $P\left(z_0, p_0, \vec{r}_1, \vec{p}_1, .., \vec{r}_N, \vec{p}_N\right)$ voor een specifieke combinatie van posities en impulsvectoren voor alle deeltjes en voor de zuiger.
c) Gebruik het antwoord op b) om de partitiefunctie uit te rekenen. Maak hierbij eventueel gebruik van de bijgeleverde tabel met integralen.
d) Combineer de antwoorden op b) en c) en bepaal de waarschijnlijkheidsdichtheid voor een specifieke zuigerhoogte z_0, ongeacht de posities van de gasdeeltjes.
e) Wat is de meest waarschijnlijke zuigerhoogte?

OPGAVE 2: *Alternatieve ensembles*

De thermodynamische potentiaal die karakteristiek is voor het microcanonieke ensemble is de entropie $S^0 = \ln \Omega\left(N, E, V\right)$.

a) Welke potentiaal gebruik je binnen het canonieke ensemble, waarin N, T en V constant gehouden worden? Druk deze canonieke potentiaal uit in de entropie S^0 en andere basisgrootheden.

We maken nu de overstap naar een ensemble waarvan we het volume niet voorschrijven. Het aantal deeltjes N ligt vast, het systeem kan energie uitwisselen met een groot reservoir en het kan zijn volume aanpassen, ten koste van het volume van het reservoir.

b) Noem de thermodynamische potentiaal van dit ensemble ξ. Van welke drie grootheden is deze potentiaal een functie? Welke vorm verwacht je voor deze potentiaal, opnieuw uitgedrukt in de entropie S^0 en andere basisgrootheden?

We analyseren ons nieuwe ensemble op de gebruikelijke manier, waarbij we het beschouwen als een deelsysteem van een veel groter, canoniek ensemble.

c) Geef een uitdrukking voor de waarschijnlijkheid $P_V\left(z_1,..,z_N\right)$ om het deelsysteem aan te treffen met de N deeltjes op specifieke posities in de faseruimte, $\left(z_1,..,z_N\right)$, waarbij z_i telkens staat voor de combinatie van positie en impuls van deeltje i, namelijk $\left(\vec{r}_i,\vec{p}_i\right)$, en de N deeltjes zich allemaal bevinden binnen het (deel)-volume V

d) Herschrijf de uitdrukking van c) met behulp van een 1e-orde ontwikkeling van de canonieke potentiaal van het reservoir naar het volume, om zo tot een resultaat te komen dat de vorm heeft $P_V\left(z_1,..,z_N\right)\propto e^{-\beta H\left(z_1,..,z_N\right)-gV}$, waarbij H de Hamiltoniaan is van het N-deeltjes systeem. Geef aan wat g is.

Tenslotte beschouwen we het 'groot-kolderiek' ensemble, waarin we gelijktijdig elk van de drie oorspronkelijke variabelen $\left(N,E,V\right)$ vervangen door de daarmee geconjugeerde variabelen.

e) Bedenk opnieuw welke thermodynamische potentiaal bij het ensemble hoort en maak gebruik van de thermodynamische identiteit $S^0=\alpha N+\beta E+\beta pV$ om te laten zien dat dit geen zinvol ensemble is. Zie je ook waar de denkfout zit in de constructie van dit ensemble?

OPGAVE 3: *Ideale klassieke en Fermi-gassen in zwaartekrachtsveld*

Een kolom van een ideaal gas van deeltjes met massa m wordt onderworpen aan het zwaartekrachtsveld, dat beschreven wordt door de potentiaal $U\left(z\right)=mgz$. De kolom begint bij een hoogte $z=0$ met een dichtheid van n_0. We nemen aan dat de dichtheid voldoende traag met de hoogte varieert dat we overal plaatselijk de statistiek voor een uniform gas kunnen toepassen. We beginnen met een klassiek ideaal gas.

a) Leid af hoe de dichtheid van een klassiek ideaal gas onder deze omstandigheden afhangt van de hoogte bij een eindige temperatuur.

Nu beschouwen we een ideaal Fermi gas van spin-$\frac{1}{2}$ deeltjes.

b) Geef voor het geval van ideale spin-$\frac{1}{2}$ fermionen het verband tussen de Fermi-energie en de dichtheid van het gas bij het absolute nulpunt, $T=0$.

c) Omdat U een functie is van de hoogte, is de dichtheid van het gas niet constant. Maar volgens het antwoord bij b) zou dit betekenen dat de Fermi-energie, de maximaal bezette energie (bij $T=0$), van de hoogte afhangt. Betekent dit dat het

Fermi systeem niet in evenwicht is? Licht je antwoord toe aan de hand van het gedachtenexperiment dat je een deeltje verplaatst naar een andere hoogte.

d) Leid op basis van je overweging bij c) af hoe de Fermi-energie afhangt van de hoogte en reken hieruit uit wat de hoogteverdeling is van de dichtheid van het Fermi-gas.

e) Hoe verloopt de dichtheid van het Fermi-gas bij $T=0$ bij grote hoogte?

A.14 TABLE OF INTEGRALS

$$\int_o^\infty e^{-ax^2} x^{2n}\,dx = \frac{1\times 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^{(2n+1)/2}}\sqrt{\pi} \qquad \int_o^\infty e^{-ax^2} x^{2n+1}\,dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

$$\int_o^\infty \frac{x^s}{e^x-1}\,dx = s!\zeta(s+1) \quad s>0 \qquad \int_o^\infty \frac{x^s}{e^x+1}\,dx = (1-2^{-s})s!\zeta(s+1)$$

$$\int_o^\infty \frac{dx}{e^x+1} = \log 2 \qquad \int_o^\infty e^{-x}x^u\,dx = \Gamma(u+1)$$

Special Values of the Riemann Zeta Function and the Gamma Function

$\zeta(1)=\infty$	$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$	$\zeta(3)=1.202$	$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$
$\zeta(5)=1.037$	$\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}$	$\zeta(3/2)=2.612$	$\zeta(5/2)=1.341$
$\Gamma(u+1)=u\Gamma(u)$	$\Gamma(N)=(N-1)!$	$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$	

A.15 PHYSICAL CONSTANTS AND CONVERSIONS

c	2.998×10^{8}	m/s	Speed of light
e	1.602×10^{-19}	C	Electronic charge
$\hbar$	1.055×10^{-34}	J s	Planck's constant
h	6.626×10^{-34}	J s	Planck's constant
k	1.381×10^{-23}	J/K	Boltzmann's constant
u	1.661×10^{-27}	kg	Atomic mass unit
m_e	9.1095×10^{-31}	kg	Electron mass
N_A	6.022×10^{23}		Avogadro's number
R	8.314	J/mol K	Molar gas constant
ϵ_o	8.854×10^{-12}	F/m	Permittivity of vacuum
μ_o	$4\pi\times10^{-7}$	H/m	Permeability of vacuum
Å	10^{-10}	m	Ångstrom

Energy	1 cal = 4.186 J
	1 eV = 1.602×10^{-19} J
Pressure	1 atm = 1.013×10^{5} N/m^2
	1 bar = 10^{5} N/m^2
	1 mm Hg = 1.333×10^{5} N/m^2
Temperature	0° C = 273.15 K

STP = 0° C and 1 atm $\quad n(\mathrm{STP}) = 2.69\times10^{25}$ part./m^3