Tentamen Statistische en Thermische Fysica I
Donderdag 4 juni 2009
Duur: 3 uur

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam**, **studierichting**, en evt. **collegekaartnummer**! (TIP: lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag)

Uitslag: over ca. 3 weken bij studentenadministratie en op de STF1-webpagina. Als je bezwaar hebt tegen vermelding van je uitslag op de webpagina, geef dit dan duidelijk aan op het eerste blad.

OPGAVE 1: *Weetjes*

Geef beknopt (maximaal 4 regels tekst per onderdeel) antwoord op de volgende vragen. Benoem daarbij telkens alle grootheden die je gebruikt.

a) De entropie, de canonieke potentiaal en de groot-canonieke potentiaal bevatten alle drie een bijdrage $k_B \ln\left(1/N!\right)$. Wat ligt hieraan ten grondslag?

b) Systemen in evenwicht vertonen fluctuaties rond de gemiddelde waarden van de niet vastgelegde variabelen, zoals de energie E van een systeem dat op constante temperatuur wordt gehouden en het aantal deeltjes N van een systeem dat op constante temperatuur en druk wordt gehouden. Hoe schaalt de amplitude van deze fluctuaties voor bijvoorbeeld E en N met de grootte van het systeem? Gebruik hierbij als maat voor de grootte van het systeem het aantal deeltjes N of het gemiddeld aantal deeltjes $\langle N\rangle$. Hoe schaalt de amplitude van de gerelateerde, z.g. intensieve grootheden $\varepsilon = E/N$ en $n = N/V$?

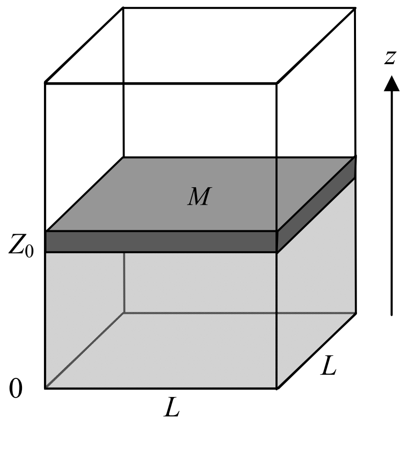
c) Hoe luidt de Centrale Limietstelling en wat betekent deze?

d) Geef een uitdrukking voor de Maxwell-Boltzmann verdeling van waarschijnlijkheden voor klassieke deeltjes om zich met snelheid $\vec{v}$ op positie $\vec{r}$ te bevinden in een externe potentiaal $U\left(\vec{r}\right)$.

e) Formuleer het Equipartitietheorema. Gebruik dit theorema om te beredeneren hoe groot de thermische energie van één klassieke, ééndimensionale harmonische oscillator is.

OPGAVE 2: *Fermigas onder druk*

We beschouwen een ideaal Fermi gas met N deeltjes (spin $\frac{1}{2}$), elk met massa m, dat zich bij constante temperatuur bevindt in een rechthoekig vat, onder een zuiger met massa M. Het grondvlak van het vat is een vierkant met zijden met lengte L. De zuiger kan wrijvingsloos omhoog of omlaag bewegen en wordt daarbij beschreven door één coördinaat z_0. Laat het effect van de zwaartekracht op de gasdeeltjes buiten beschouwing. Ons coördinatenstelsel is zo gekozen dat de bodem van het vat zich bij $z = 0$ bevindt.



a) Geef de mogelijke waarden van k_x, k_y en k_z voor de gasdeeltjes onder de zuiger.

Voor een Fermi-systeem geldt $N = \int_0^\infty F_{FD} D(\varepsilon)\, d\varepsilon$ en $\langle E \rangle = \int_0^\infty \varepsilon F_{FD} D(\varepsilon)\, d\varepsilon$, waarbij $D(\varepsilon)$ de toestandsdichtheid is en $F_{FD} = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/\tau} + 1}$ de bezettingsgraad.

b) Gebruik het resultaat van (a) om $D(\varepsilon)$ te bepalen voor dit kwantumsysteem.

c) Druk N uit als functie van de Fermi-energie ε_F voor een temperatuur van $T = 0\ \mathrm{K}$.

d) Schrijf de gemiddelde energie $\langle E \rangle$ als functie van de Fermi-energie ε_F en het aantal deeltjes N, bij $T = 0\ \mathrm{K}$.

e) Los op voor $T = 0\ \mathrm{K}$ wat de positie van de zuiger is als functie van het aantal deeltjes N en de massa van de zuiger M. Gebruik eventueel $pV = \frac{2}{3}\langle E \rangle$. Is het resultaat ook wat je verwacht had als we te maken hadden gehad met niet-kwantummechanische, klassieke deeltjes? Beargumenteer je antwoord.

Voor eindige temperaturen zijn de bovengenoemde integralen niet eenvoudig op te lossen. Voor lage temperaturen kan de volgende expansie worden gemaakt:

$$\frac{\langle E \rangle}{N} = \frac{3}{5}\varepsilon_F + \frac{\pi^2 k_B^2 T^2}{4\varepsilon_F}$$

f) Wat gebeurt er in deze limiet met de druk als de temperatuur een klein beetje toeneemt? Beweegt de zuiger omhoog, omlaag of helemaal niet? Als de zuiger beweegt, zit daar dan een beperking aan de beweging?

g) Hoe veranderen de hierboven gegeven integralen in de limiet van hoge temperaturen, en wat wordt dan de positie van de zuiger? (hint: vul eventueel voor de potentiaal in $\mu = -\alpha\tau = -\alpha k_B T$.)

OPGAVE 3: *Adsorptie op een ondergedompeld oppervlak*

Beschouw een oppervlak dat bij een vaste temperatuur ondergedompeld is in een oplossing met een zeer groot volume. Het oppervlak bevat een vast aantal adsorptieposities waarop deeltjes kunnen aanhechten vanuit de oplossing. De energie van een geadsorbeerd deeltje ten opzichte van de opgeloste toestand bedraagt $-\varepsilon_1 < 0$ en elke adsorptiepositie kan door maximaal twee deeltjes gelijktijdig worden bezet.

a) Welk ensemble uit de statistische mechanica is het meest geschikt om deze situatie te beschrijven? Welk element speelt hier de rol van reservoir en waaruit bestaat dan het beschreven systeem? Welke thermodynamische eigenschappen van het systeem zijn hier vastgelegd en welke grootheden kunnen zich hier vrij instellen, bijvoorbeeld door uitwisseling tussen reservoir en systeem?

b) Geef een uitdrukking voor de partitiefunctie voor één afzonderlijke adsorptiepositie. Wat is de betekenis van de partitiefunctie?

c) Als er M mogelijke adsorptieposities zijn, wat is dan de verwachtingswaarde voor het aantal geadsorbeerde deeltjes?

d) Wat is de waarschijnlijkheid dat een adsorptiepositie bezet is met twee deeltjes? Hoe groot is deze waarschijnlijkheid in de limiet van hoge en in de limiet van lage temperaturen?

e) Nu beschouwen we wat er verandert als met de toevoeging van een tweede deeltje aan een adsorptiepositie een extra energie gemoeid is van $+\varepsilon_2 > 0$. Welke toestanden hebben de voorkeur als $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0$? Bespreek ook de lage- en hoge-temperatuur limieten.