

Tentamen Statistische en Thermische Fysica II
Donderdag 1 juli 2004
Duur: 3 uur

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam, studierichting**, en evt. **collegekaartnummer!** (TIP: lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag)

Uitslag: over ca. 2 weken bij studentenadministratie en op de STF2-webpagina. Als je bezwaar hebt tegen vermelding van je uitslag op de webpagina, geef dit dan duidelijk aan op het eerste blad.

OPGAVE 1: *Quantummechanische, harmonische oscillator*

We beschouwen een eenvoudig molecuul dat we beschrijven als een quantummechanische, harmonische oscillator met (hoek-) eigenfrequentie ω (en nulpuntsenergie $\frac{1}{2}\hbar\omega$), bij een temperatuur T .

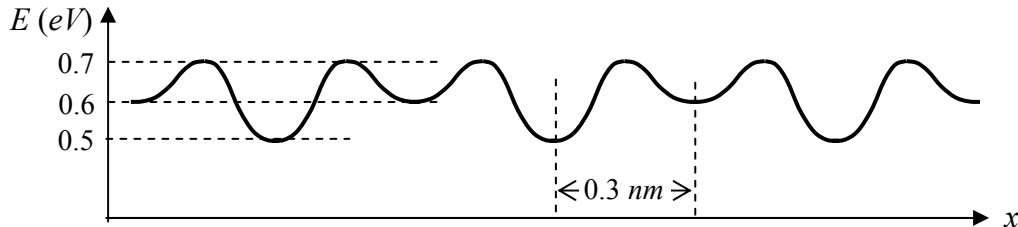
- a) Welk ensemble gebruik je om dit systeem te beschrijven?
- b) Reken de partitiefunctie uit voor dit molecuul. Beschouw daarbij uitsluitend de trillingen (dus geen translatie- en rotatievrijheidsgraden).
- c) Wat is de partitiefunctie van een systeem van N (onderscheidbare) identieke, niet-wisselwerkende oscillatoren van het hierboven beschreven type?
- d) Gebruik de partitiefunctie van c) om de bijbehorende kanonieke potentiaal uit te rekenen.
- e) Leid uit het antwoord bij d) de gemiddelde energie af van het systeem en de affiniteit.
- f) Bepaal tenslotte de specifieke warmte van het systeem van oscillatoren.

OPGAVE 2: *Water, ijs en Clausius-Clapeyron*

- a) Schets het fasediagram (p, T -diagram) voor de vaste, vloeibare en gasfasen van een typische substantie. Geef naast deze drie fasen en hun coëxistentielijnen ook het tripelpunt aan en het kritische punt.
- b) Hoe luidt de wet van Clausius-Clapeyron, uitgedrukt in termen van de latente warmte per mol L voor een eerste-orde faseovergang en de molaire volumina van de twee betrokken fasen?
- c) Dicht bij het tripelpunt geldt uiteraard bij goede benadering $L_{sg} = L_{sl} + L_{lg}$, waarbij L de latente warmte per mol is voor sublimatie (sg), smelten (sl) en verdampen (lg). Neem verder aan dat het molaire volume V_l van de vloeistof en V_s van de vaste stof beiden verwaarloosd kunnen worden t.o.v. het molaire volume V_g van het gas. Gebruik deze gegevens om te laten zien dat de coëxistentielijn voor vast-gas bij het tripelpunt in het p, T -diagram steiler loopt dan die voor vloeistof-gas.
- d) Water en ijs hebben de bijzondere eigenschap dat het molaire volume van water bij het tripelpunt kleiner is dan dat van ijs (bij 0°C drijft ijs op water). Hoe komt deze eigenschap tot uiting in het p, T -diagram?
- e) Is het bij d) bedoelde effect gunstig of ongunstig bij schaatsen?

OPGAVE 3: Manke diffusie

Beschouw een klassiek deeltje dat diffundeert in het getekende, eendimensionale, periodieke energielandschap bij kamperatuur ($kT \approx 25 \text{ meV}$). De relevante energieën zijn in de grafiek aangegeven in elektronVolts. De minima in de energie bevinden zich op onderlinge afstanden van $a = 0.3 \text{ nm}$.



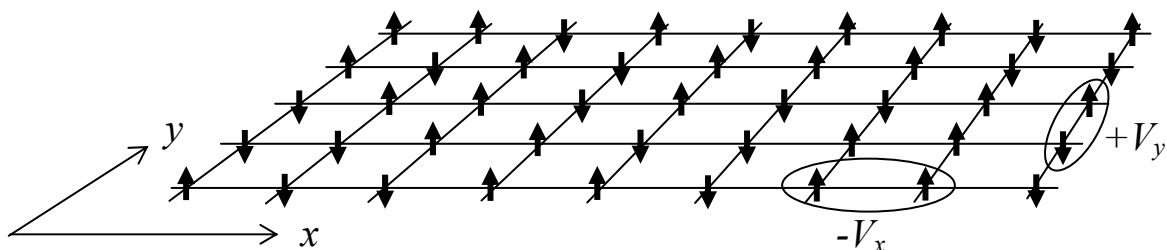
Neem aan dat het deeltje zich telkens op een van de getekende, diepe of ondiepe energiminima bevindt en dat het tussen naburige minima instantane sprongen maakt. Ga ervan uit dat de probeerfrequentie voor dergelijke sprongen $\nu_0 = 5 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ bedraagt, zowel vanuit de diepe naar de ondiepe minima als in omgekeerde richting.

Geef in deze opgave de antwoorden telkens in formule-vorm, en probeer waar mogelijk ook de bijbehorende getallen uit te rekenen.

- Met welke waarschijnlijkheid tref je het deeltje aan in een diep minimum en met welke waarschijnlijkheid in een ondiep minimum? (TIP: beschouw uitsluitend twee direct naast elkaar gelegen minima, een hoog en een laag, en bereken de gevraagde waarschijnlijkheden binnen het kanonieke ensemble).
- Wat is de gemiddelde tijd die een deeltje verblijft in een diep minimum en wat is de gemiddelde verblijftijd in een ondiep minimum?
- Laat zien dat de antwoorden bij a) en b) consistent zijn met elkaar.
- Wat is de diffusiecoëfficiënt van het deeltje als gevolg van deze gecombineerde beweging?

OPGAVE 4: Anisotroop, tweedimensionaal Ising model

In deze opgave gebruiken we de gemiddelde-veld ("mean field") benadering om het verschil te bestuderen tussen het tweedimensionale Ising model met anisotrope en isotrope wisselwerkingen. We beperken ons tot een rechthoekig spinrooster met roosterafstanden a_x en a_y , waarin elke spin wisselwerkt met zijn naaste burens in de x - en de y -richting. De wisselwerkingsenergieën in deze richtingen zijn respectievelijk V_x en V_y . Als $V_x = V_y$ dan reduceert het model natuurlijk tot het isotrope tweedimensionale Ising model. Het gehele rooster bevindt zich in een verticaal gericht, constant uitwendig magneetveld \vec{B} .



- Geef een uitdrukking voor de totale energie van een configuratie C van de spins.

- b) Pas de gemiddelde-veld benadering toe op de uitdrukking van a). Schrijf hiertoe elke spin als de som van de gemiddelde spinwaarde en de lokale afwijking van dat gemiddelde en verwaarloos vervolgens alle correlaties tussen de fluctuaties van (naburige) spins. Laat zien dat je de energie van de configuratie kunt schrijven als $E(C) = N(V_x + V_y)\bar{\sigma}^2 - H'(B, V_x, V_y, \bar{\sigma}) \sum \sigma$, waarbij N het totaal aantal spins is en de sommatie zich uitstrekt over alle spins. Wat is $H'(B, V_x, V_y, \bar{\sigma})$?
- c) Gebruik het resultaat van b) om uitdrukkingen op te stellen voor de waarschijnlijkheden voor individuele spins om de waarden $\sigma = +1$ en $\sigma = -1$ aan te nemen, als functie van de temperatuur $T = 1/k\beta$, het externe magneteveld B en de gemiddelde spinwaarde $\bar{\sigma}$. Construeer met behulp van deze twee waarschijnlijkheden een uitdrukking voor de gemiddelde spin $\bar{\sigma}$ en laat zien dat het resultaat een niet-lineaire vergelijking oplevert waarmee de waarde(n) van $\bar{\sigma}$ bepaald kan (kunnen) worden.
- d) Beschrijf in woorden de manier waarop de combinatie van V_x en V_y in de vergelijkingen voor $E(C)$ en $\bar{\sigma}$ voorkomt, en leg uit dat dit binnen de context van de gemiddelde-veld benadering te verwachten was. Geeft de optredende V_x, V_y combinatie het gedrag van het spinsysteem correct weer? Bedenk welke situatie je bij lage temperatuur kunt verwachten als $V_x > 0$ en $V_y < 0$ (met als extreme variant $V_x + V_y = 0$) en betrek deze situatie in je antwoord.