Tentamen Statistische en Thermische Fysica II
Donderdag 16 februari 2006
Duur: 3 uur

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam**, **studierichting**, en evt. **collegekaartnummer**! (TIP: lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag)

Uitslag: over ca. 3 weken bij studentenadministratie en op de STF2-webpagina. Als je bezwaar hebt tegen vermelding van je uitslag op de webpagina, geef dit dan duidelijk aan op het eerste blad.

OPGAVE 1: *De motor van Carnot*

In deze opgave beschouwen we een ideale motor, die warmte omzet in mechanische arbeid. De motor bevat een zuiger die wrijvingsloos in een cilinder kan bewegen en twee warmte-reservoirs die op twee vaste temperaturen worden gehouden, T_{laag} en T_{hoog}. In de beginsituatie is de cilinder gevuld met een volume V_0 van een gas, bij de hoge temperatuur T_{hoog}. De druk bedraagt dan p_0. Een cyclus van de motor gaat door de volgende 4 stadia.

- Het gas krijgt de gelegenheid om te expanderen naar een nieuw volume V_1 (en een nieuwe druk p_1). De cilinder en het gas blijven hierbij in thermisch contact met het warme reservoir, zodat de temperatuur constant blijft op T_{hoog}.
- De thermische verbinding wordt verbroken en het nu geïsoleerde systeem krijgt de kans om verder te expanderen. Tijdens deze expansie daalt de temperatuur. Als deze gelijk wordt aan T_{laag}, wordt de expansie gestopt. Het volume bedraagt dan V_2 en de druk is dan p_2.
- Nu wordt een thermische verbinding tot stand gebracht met het koele reservoir bij temperatuur T_{laag}. Het gas wordt bij deze temperatuur gecomprimeerd tot een volume V_3, terwijl de druk weer oploopt naar p_3.
- Tenslotte wordt de thermische verbinding weer verbroken en wordt het opnieuw geïsoleerde systeem verder gecomprimeerd. De grootte van het volume V_3 (zie vorige stap) is hierbij zodanig gekozen dat deze compressie het systeem terugbrengt in de beginsituatie met volume V_0 en druk p_0 bij temperatuur T_{hoog}.

Al deze veranderingen worden zo langzaam doorlopen dat aangenomen mag worden dat het systeem op elk tijdstip in evenwicht verkeert.

a) Teken een schematisch p,V-diagram waarin de vier delen van de cyclus zijn aangegeven. Welke namen geef je aan de vier doorlopen krommen? Bij welke krommen verandert de druk het snelst?
b) Geef een uitdrukking voor de door het expanderende gas geleverde arbeid tijdens het eerste deel van de cyclus. Wat gebeurt er onderweg met de entropie? Druk de hoeveelheid warmte die mogelijk wordt uitgewisseld met het warmte-reservoir uit in de entropieverandering. Hoe groot is de verandering van de interne energie tijdens dit deel van het proces?
c) Beantwoord vraag (b) ook voor de andere drie takken van de cyclus.
d) Wat is de netto hoeveelheid arbeid die door de motor geleverd wordt in één cyclus? Het gaat dus om de som/verschil van alle onderweg geleverde en opgenomen hoeveelheden. (Tip: druk de arbeid uit in de energieveranderingen en de uitgewisselde warmte.)

e) De energiebron waarop de motor loopt is die van de warmte die het warme reservoir telkens gedurende de eerste tak van de cyclus levert. De teruggeleverde warmte aan het koele reservoir moet als verloren afvalwarmte worden beschouwd. Druk de efficiency van deze motor, de verhouding tussen de netto geleverde mechanische arbeid en de door het warme reservoir geleverde warmte, uit in de temperaturen van de twee reservoirs.

<u>OPGAVE 2:</u> *<u>Aangedreven diffusie</u>*
In het college hebben we (sprong)-diffusie behandeld van deeltjes op een regelmatig rooster met gelijke energiebarrières in alle richtingen. We berekenen nu enkele consequenties van het aanleggen van een voorkeursrichting. We beginnen met een 1-dimensionale potentiaal met de vorm:

$$V(x) = V_0\left[1-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right] - V_1\frac{x}{a},$$

waarbij a de periode is van deze potentiaal en $V_0, V_1 \geq 0$. We beschouwen hier situaties waarbij de opgelegde asymmetrie bescheiden is: $V_1 \ll V_0$. We mogen er daarom van uit gaan dat de x-coördinaten van de maxima en minima van de potentiaal zich bij zeer goede benadering bevinden op respectievelijk oneven en even veelvouden van $a/2$.

a) Wat zijn de energiebarrières voor deeltjes om vanuit een minimum naar links of naar rechts te springen? Hoe groot zijn de sprongfrequenties in beide richtingen bij een temperatuur T als de probeerfrequentie voor sprongen (in de positieve of negatieve x-richting) Γ_0 bedraagt?
b) De aangelegde asymmetrie geeft aanleiding tot transport. Hoe groot is de driftsnelheid waarmee de deeltjes gemiddeld naar rechts worden gedreven? Geef ook aan hoe deze snelheid zich gedraagt voor zeer kleine V_1.
c) Hoe combineert de diffusie met deze drift? Beschouw bijvoorbeeld een deeltje dat op tijdstip $t_0 = 0$ in de oorsprong start met zijn beweging in de scheefgetrokken potentiaal. Hoe ziet de waarschijnlijkheidsverdeling van dit deeltje er uit op een later tijdstip t? Is deze nog steeds symmetrisch? Hoe groot is de diffusiecoëfficiënt? Geef ook de limiet voor zeer kleine V_1.

Stel je voor dat dit scheve potentiaal-landschap zich oneindig ver uitstrekt en dat het bezet wordt met een uniforme dichtheid aan deeltjes.
d) Veranderen de dichtheden van deeltjes als gevolg van hun sprongen? Is er sprake van gedetailleerde balans ("detailed balance")?
e) We ons beperken vervolgens tot een eindig interval langs de x-as met een lengte Na waarlangs zich de scheve potentiaal bevindt, waarin we een uniforme initiële dichtheid van deeltjes aanbrengen. De deeltjes kunnen niet buiten dit interval komen. Veranderen in deze situatie de dichtheden als gevolg van de diffusie? Zoja, wat is dan de eindverdeling van de deeltjes?

Tenslotte stellen we ons de combinatie voor van een cosinusvormig aandeel in de potentiaal en een zaagtand met een periode van Na en een amplitude NV_1. Het resulterende patroon strekt zich langs de x-as oneindig ver uit.
f) Wat zijn nu de waarschijnlijkheden voor een deeltje om zich in de verschillende minima te bevinden? Wordt er in dit geval voldaan aan gedetailleerde balans?

OPGAVE 3: *Adsorptie met competitie*

Een groot volume van een mengsel van twee verschillende, “ideale” gassen, Ar en Xe, wordt in contact gebracht met een oppervlak waarop zich N adsorptieposities bevinden. Elk van deze posities kan met hooguit één deeltje worden bezet. De temperatuur van het oppervlak bedraagt T. De adsorptie-energieën van de gasmoleculen $E_{Ar}^{ads} \neq E_{Xe}^{ads}$ zijn beiden negatief (er komt warmte vrij bij adsorptie).

a) In welk thermodynamisch ensemble ga je de situatie beschrijven? Geef een uitdrukking voor de partitiefunctie voor één afzonderlijke adsorptiepositie op het oppervlak. Via welke groothe(i)d(en) komen de partieeldrukken van Ar en Xe in de gasfase tot uiting?

b) Hoe ziet de partitiefunctie er uit voor het gehele systeem van N adsorptieposities?

c) Hoe groot zijn de waarschijnlijkheden voor een positie om (i) leeg te zijn, (ii) bezet te zijn met een Ar atoom, of (iii) bezet te zijn met een Xe atoom?

d) We beschouwen Ar en Xe als monoatomaire, ideale gassen en laten eventuele interne vrijheidsgraden van Ar en Xe atomen buiten beschouwing. Geef op basis hiervan een uitdrukking voor de affiniteiten α_{Ar} en α_{Xe} van Ar en Xe. Druk het resultaat voor elk gas uit in de partieeldruk van dat gas, de atoommassa en de temperatuur. (Tip: als je niet meer de volledige uitdrukking weet voor de de Broglie golflengte, gebruik dan in ieder geval dat $\lambda \propto 1/\sqrt{m}$.)

e) Gebruik het bij (d) afgeleide resultaat om uit te rekenen wat de relatie moet zijn tussen de partieeldrukken van Ar en Xe om precies even grote dichtheden van beide atoomsoorten op het oppervlak te krijgen.