Tentamen Wiskundige Methoden van de Natuurkunde

16 juni 2005, 10.00-13.00

1a. Geef de definitie van een Cartesische pseudotensor van rang k op de n-dimensionale affiene ruimte E_n. (4 pt)

b. Laat zien dat het Levi-Civitàsymbool ϵ_{ijk} een Cartesische pseudotensor is van rang 3 op E_3. (4 pt)

T.o.v. een zeker Cartesisch coördinatenstelsel met coördinaten x_1, x_2, x_3 in E_3 heeft de Cartesische rang-2-tensor $\mathbf{J}$ de vorm $J_{ij} = \begin{cases} J & \text{als } i = j = 1 \text{ of } i = j = 2 \\ -J & \text{als } i = j = 3 \\ 0 & \text{als } i \neq j. \end{cases}$.

Het coördinatenstelsel wordt om de x_2-as geroteerd over een hoek $\pi/2$ (gezien vanuit de positieve x_2-as). Hierdoor ontstaat een nieuw Cartesisch coördinatenstelsel met coördinaten x'_1, x'_2, x'_3.

c. Druk de coördinaten x'_i uit in x_1, x_2, x_3. (3 pt)

d. Bepaal de componenten J'_{ij} van de tensor $\mathbf{J}$ t.o.v. het nieuwe coördinatenstelsel. (7 pt)

2. Op de tweedimensionale ruimte M^2 met globale coördinaten (t, x) wordt de Minkowskimetriek gegeven door $ds^2 = dt^2 - dx^2$. De matrix van de metrische tensor (g_{ij}) is dus $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Via de metriek is een inwendig product gedefinieerd d.m.v. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T H \mathbf{y} = x^0 y^0 - x^1 y^1$, waarbij x^0, x^1 de t-, resp. x-coördinaten zijn van $\mathbf{x}$. Een Lorentztransformatie $\mathbf{x} \to \Lambda \mathbf{x}$ is een (globale) lineaire coördinatentransformatie (met 2×2-matrix Λ) die het inproduct op M^2 behoudt, d.w.z. $\langle \Lambda \mathbf{x}, \Lambda \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ voor elke $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix}$.

a. Toon aan dat $\mathbf{x} \to \Lambda \mathbf{x}$ een Lorentztransformatie is dan en slechts dan als $\Lambda^T H \Lambda = H$. (2 pt)

b. Bewijs dat de Lorentztransformaties in M^2 een groep vormen. (Deze groep is de Lorentzgroep $O(1, 1)$.) (6 pt)

c. Geef een basis aan van de vectorruimte $\mathcal{G}$ van de voortbrengers van infinitesimale Lorentztransformaties van M^2. (6 pt)

d. De verzameling van voortbrengers van infinitesimale transformaties $\mathcal{G}$ heeft niet alleen de structuur van een vectorruimte, maar vormt zelfs een Lie-algebra. Leg uit wat hiermee wordt bedoeld en laat expliciet zien dat $\mathcal{G}$ een Lie-algebra is. (5 pt)

e. De orthochrone Lorentztransformaties worden gerepresenteerd door de matrices Λ waarvoor geldt dat de determinant $+1$ is en het element $\Lambda_{00} > 0$ is. Laat zien (i) dat de orthochrone Lorentztransformaties een 1-parameterondergroep vormen van $O(1, 1)$ en (ii) dat onder een orthochrone Lorentztransformatie de voorwaartse lichtkegel $\{t > 0, t > x\}$ op zichzelf wordt afgebeeld. (Deze ondergroep is in feite de samenhangscomponent van het eenheidselement van $O(1, 1)$.) (8 pt)

3. V_a is de verzameling gladde krommen $y = y(x)$ met beginpunt $A(-1,0)$ en eindpunt $B(1,0)$ die (op begin- en eindpunt na) geheel in het bovenhalfvlak $\{(x,y) \in E_2 : y > 0\}$ gelegen zijn, lengte a hebben en zichzelf niet doorsnijden. Een kromme uit V_a sluit samen met het lijnstuk AB een gebied G in. Toon aan dat van alle krommen $K \in V_a$ met $a > 2$ de in het bovenhalfvlak gelegen cirkelboog door A en B de kromme is waarvoor de oppervlakte van G maximaal is. (12 pt)
N.B. Een uitdrukking voor de kromming van een geparametriseerde vlakke kromme $x = x(t), y = y(t)$ in het punt $(x(t), y(t))$ is $\kappa(t) = \dfrac{-x''(t)y'(t) + y''(t)x'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$.

4. We beschouwen de inhomogene eendimensionale golfvergelijking

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = g(x) \qquad (t > 0, x \in \mathbf{R}) \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}. \tag{1}$$

Op college is aangetoond dat de oplossing van (1) in het geval dat $g(x) = 0$ wordt gegeven door de formule van d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\phi(x+t) + \phi(x-t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(y)dy.$$

a. Leg uit aan de hand van deze formule het begrip *domain of dependence* van een punt (x,t) (met $t > 0$) uit. (3 pt)

We beschouwen nu het geval dat de randvoorwaarden homogeen zijn, dus $\phi(x) = \psi(x) = 0$:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = g(x) \quad (t > 0, x \in \mathbf{R}) \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Om (2) op te lossen beschouwen we eerst het speciale geval dat $g(x) = \delta(x - \xi)$ voor zekere $\xi \in \mathbf{R}$.

b. Toon aan dat in de zin van *distributie*-afgeleiden:

$$\frac{d|x-\xi|}{dx} = 2\theta(x-\xi) - 1 \quad \text{en} \quad \frac{d\theta(x-\xi)}{dx} = \delta(x-\xi) \qquad (\xi \in \mathbf{R}).$$

Hierbij is $\theta(x)$ de Heavisidefunctie: $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{als } x < 0 \end{cases}$. (6 pt)

c. Laat zien m.b.v. (b) dat de unieke oplossing van (2) met $g(x) = \delta(x - \xi)$ wordt gegeven door

$$u(x,\xi,t) = \frac{1}{4}|x - \xi + t| + \frac{1}{4}|x - \xi - t| - \frac{1}{2}|x - \xi|.$$

(Aanwijzing: voor de uniciteit kan de formule van d'Alembert worden gebruikt.) (8 pt)

d. Geef een integraaluitdrukking voor de oplossing van (2) voor een willekeurige (stuksgewijs continue) functie $g(x)$. (5 pt)

e. Geef nu ook de oplossing van het beginwaardenprobleem (1). (2 pt)