Tentamen Wiskundige Methoden van de Natuurkunde,
dinsdag 16 juni 2019, 10.15-13.15

Toegestane hulpmiddelen: het collegedictaat en eigen college-aantekeningen, niet-grafische rekenmachine, kladpapier. Andere hulpmiddelen zoals gebruik van internet zijn niet toegestaan. Ook is het niet toegestaan om hulp van derden in te roepen.

Maak na afloop van het tentamen een scan van je opgaven (pdf-formaat) en stuur die zo snel mogelijk naar het emailadres **kooman@math.leidenuniv.nl** waar ook eerder het huiswerk is ingeleverd. Maak ook een afbeelding van de voorkant van je collegekaart en stuur die mee in dezelfde mail, je mag deze op de eerste of laatste pagina van je uitwerkingen zetten.

Met het inleveren van de antwoorden op het tentamen, bevestig je dat je de Verklaring van Originaliteit hebt gelezen en dat je je hebt gehouden aan de opgesomde afspraken. Elke valse claim met betrekking tot ingeleverd werk zal leiden tot disciplinaire maatregelen conform de reglementen van de universiteit. Deze disciplinaire maatregelen kunnen leiden tot uitsluiting van het vak (of zelfs de opleiding) en resulteren in een blijvende aantekening op je diploma.

Voor dit tentamen kun je 55 punten halen. Het tentamen is voldoende bij minstens 31 punten.

1. Bepaal in S_9 de orde van de permutatie

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 5 & 7 & 8 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. In $\mathbb{R}^2$ met standaardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ wordt de basis $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ gegeven door

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2.$$

De tensor $\mathbf{S}$ is van rang $(1,2)$ en heeft componenten $S^k_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{jk} + \delta_{ki}$ $(i,j,k \in \{1,2\})$ ten opzichte van de standaardbasis, waarbij δ het Kroneckersymbool voorstelt (dus niet de Kroneckertensor).

a. Bepaal de component S'^{1}_{12} van $\mathbf{S}$ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$.

b. Er geldt dat $S^k_{ij} = S^k_{ji}$, dus $\mathbf{S}$ is symmetrisch in de covariante indices. Ga na of deze eigenschap behouden blijft onder een willekeurige coördinatentransformatie, m.a.w. geldt ook $S''^{k}_{ij} = S''^{k}_{ji}$ voor de componenten van $\mathbf{S}$ t.o.v. een (willekeurige) andere basis van $\mathbb{R}^2$?

Opgave	1	2a	2b
Aantal punten	4	4	4

3. Beschouw in $\mathbb{R}^3$ het oppervlak H gegeven door $z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$. H is een deelvariëteit van $\mathbb{R}^3$. Laat $V_1 = \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ 0 < \phi < 2\pi\}$ en laat $g_1 : V_1 \to H$ gegeven zijn door

$$g_1(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi, \ln(r)).$$

g_1 is injectief en (U_1, f_1) is een kaart van H voor $U_1 = g_1(V_1)$, $f_1 = g_1^{-1}$.

a. Bepaal een andere kaart (U_2, f_2) van H zo, dat $\{(U_1, f_1), (U_2, f_2)\}$ een atlas van H vormt. Laat hierbij ook zien dat $\{(U_1, f_1), (U_2, f_2)\}$ inderdaad een atlas van H vormt!

De restrictie of pull-back van de Euclidische metrische tensor $\mathbf{g} = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ tot H is een metrische tensor $\mathbf{g}_H$ voor H.

b. Bepaal $\mathbf{g}_H$ in termen van de coördinaten op U_1 en U_2.

c. Toon aan dat de krommen $\phi =$ constant op U_1 geodeten zijn en bepaal een affiene parameter voor deze geodeten.

Opgave	3a	3b	3c
Aantal punten	6	3	6

4. In deze opgave beschouwen we de diëdergroep D_8. Zoals we weten, wordt D_8 voortgebracht door een element a van orde 8 en een element b van orde 2 en verder is $ba = a^{-1}b$.

   Gegeven is verder de afbeelding $f : D_8 \to D_8$ met

$$f(a^n b^m) = a^{4n} b^m \qquad (n = 0, \ldots, 7; m = 0, 1).$$

a. Toon aan dat f een homomorfisme is.

b. Met welke (bekende) groepen zijn $\ker(f)$ en $\mathrm{im}(f)$ isomorf?

c. Leg uit of $D_8 \cong \ker(f) \times \mathrm{im}(f)$.

5. Zij G een eindige groep. We geven de orde aan met $|G|$. Zij verder H een ondergroep van G met orde $|H| = \frac{1}{2}|G|$.

   Bewijs dat H een normaaldeler is van G.

Opgave	4a	4b	4c	5
Aantal punten	4	4	2	5

6. Beschouw nu de groep $G = D_3 \times C_2$.

a. Bepaal de conjugatieklassen van G.

b. Bepaal de dimensies van de irreducibele representaties van G.

c. Stel een karaktertabel voor de irreducibele representaties op.

Opgave	6a	6b	6c
Aantal punten	4	3	6